ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: Βασικά Εργαλεία και Μέθοδοι για τον Έλεγχο της Ποιότητας [ΔΙΠ 50]

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Προσοχή: *Οι απαντήσεις των ασκήσεων πρέπει να φθάσουν στον Καθηγητή-Σύμβουλο, ιδανικά, μέχρι τις 08/11/2009 και σε καμιά περίπτωση αργότερα από τις 10/11/2009.*

ΟΔΗΓΙΕΣ: Η σειρά των παρακάτω θεμάτων και ερωτημάτων δεν ακολουθεί απαραίτητα τη σειρά των περιεχομένων του εκπαιδευτικού υλικού.
Η γραπτή εργασία πρέπει να σταλεί με ταχυδρομείο ή courier (όχι με ηλεκτρονικό ταχυδρομείο ή Fax) στον Καθηγητή Σύμβουλο και να συνοδεύεται από το συμπληρωμένο ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΟ ΕΝΤΥΠΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ (Έντυπο Α). Οι απαντήσεις σας στα ερωτήματα πρέπει να περιέχουν πλήρη αιτιολόγηση και να είναι είτε δακτυλογραφημένες, είτε καθαρογραμμένες, ώστε να μπορεί να τις διαβάζει εύκολα ο Καθηγητής-Σύμβουλος. Πρέπει να υπάρχουν περιθώρια αριστερά, δεξιά και στο τέλος κάθε ερωτήματος για να μπορεί να κάνει χειρόγραφα σχόλια ο Καθηγητής-Σύμβουλος. Η αιτιολόγηση σε κάθε ερώτημα μπορεί να δίνεται με αναγραφή των σχετικών τύπων ή με παραπομπή στο σχετικό εδάφιο ή στη σχετική υποενότητα και σελίδα από το εκπαιδευτικό υλικό που σας έχει αποσταλεί.
Επιτρέπεται η χρήση του MINITAB εκτός από τις περιπτώσεις που υποδεικνύεται η μη χρήση του. Δεν θα βαθμολογούνται απαντήσεις στις οποίες γίνεται χρήση άλλου στατιστικού πακέτου (εκτός του MINITAB). Επιτρέπεται η χρήση του Excel για τη διενέργεια μόνον απλών αριθμητικών υπολογισμών.
Προσοχή! Στα ερωτήματα που κάνετε χρήση του πακέτου MINITAB είναι απαραίτητο στις απαντήσεις σας να περιλαμβάνετε τα εξής στοιχεία: (α) πλήρη προσδιορισμό της σχετικής διαδικασίας του MINITAB που ακολουθήσατε, (β) εκτύπωση των περιεχομένων του session window (πάνω μέρους της οθόνης) και, ενδεχομένως, άλλων αποτελεσμάτων του πακέτου αυτού (π.χ. γραφικών), και (γ) πλήρη ερμηνεία όλων των αποτελεσμάτων του MINITAB που σχετίζονται με τα ερωτήματα.

ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ: Οι μονάδες που αντιστοιχούν σε κάθε θέμα και σε κάθε ερώτημα χωριστά δίνονται μέσα σε παρένθεση (σύνολο 100 μονάδες).

Άσκηση 1 (13 Μονάδες)

Σε ένα ράφι μιας βιβλιοθήκης τοποθετούνται με τυχαία σειρά 11 διαφορετικά βιβλία τεσσάρων θεματικών ενοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν 4 βιβλία μαθηματικών, 3 βιβλία φυσικής, 2 βιβλία χημείας και 2 βιβλία βιολογίας.

(α-2) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα 11 βιβλία στο ράφι;

(β-3) Ποια είναι η πιθανότητα να τοποθετηθούν πρώτα στο ράφι τα 4 βιβλία των μαθηματικών και τελευταία τα 3 βιβλία της φυσικής;

(γ-4) Ποια είναι η πιθανότητα όλα τα βιβλία της ίδιας θεματικής ενότητας να τοποθετηθούν μαζί;

(δ-4) Τρία βιβλία επιλέγονται τυχαία από το ράφι χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλεγεί τουλάχιστον ένα βιβλίο μαθηματικών ή τουλάχιστον ένα βιβλίο βιολογίας;

Άσκηση 2 (12 Μονάδες)

Δύο σκοπευτές, ο Σ1 και ο Σ2, ρίχνουν από μια βολή κατά ενός κυκλικού στόχου ακτίνας r. Ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε τις αποστάσεις των δύο βολών από το κέντρο του στόχου. Γνωρίζουμε ότι (α) οι δύο βολές βρίσκουν το στόχο, και (β) η (απόλυτη) διαφορά των δύο αποστάσεων είναι μικρότερη ή ίση του $r/2$.

(α-4) Να παρασταθεί γραφικά ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα:

Α = {η βολή του Σ2 βρίσκεται πιο κοντά στο κέντρο του στόχου από τη βολή του Σ1},

Β = {η βολή του Σ1 απέχει από το κέντρο του στόχου απόσταση μεγαλύτερη του $r/2$},

Γ = {μόνο μια βολή απέχει από το κέντρο του στόχου απόσταση μικρότερη του $r/2$}.

(β-1) Εξετάστε αν τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ εξαντλούν από κοινού το δειγματικό χώρο.

(γ-4) Δείξτε σε ξεχωριστές γραφικές παραστάσεις τα ενδεχόμενα

$$A \cap B \cap \Gamma,\ \ A' \cap B' \cap \Gamma',\ \ (B \cup \Gamma) - A,\ \ A' \cup B' \cap \Gamma'.$$

(δ-3) Βρείτε τρία ενδεχόμενα που να είναι ασυμβίβαστα ανά δύο και να εξαντλούν από κοινού το δειγματικό χώρο.

Άσκηση 3 (15 Μονάδες)

Επιλέξτε τη σωστή συμπλήρωση (i), (ii), (iii) ή (iv) στην τελευταία πρόταση των παραγράφων (α)-(ε). Αιτιολογήστε την απάντησή σας εξηγώντας γιατί οι 3 από τις 4 επιλογές κάθε ερωτήματος είναι λάθος.

(α-3) Για τη μελέτη των εμπορικών καταστημάτων της Πάτρας που φοροδιέφυγαν το έτος 2007 επιλέχθηκαν στην τύχη 100 εμπορικά καταστήματα τα οποία ελέγχθηκαν από ειδικό κλιμάκιο της εφορίας. Για κάθε ένα από τα καταστήματα καταγράφηκε ο αριθμός 1 και 0 ανάλογα με το αν φοροδιέφυγε ή όχι. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

(i) η μελέτη είναι αναλυτική.
(ii) το υπό μελέτη χαρακτηριστικό των καταστημάτων είναι ποσοτικό.
(iii) ο πληθυσμός αποτελείται από τα 100 καταστήματα που ελέγχθηκαν.
(iv) το δείγμα αποτελείται από τα 100 συνολικά 0 και 1 που καταγράφηκαν.

(β-3) Ένα καρδιοχειρουργικό κέντρο πραγματοποιεί μια έρευνα για δύο από τους σημαντικότερους παράγοντες κινδύνου που μπορούν να αυξήσουν σε σημαντικό βαθμό τον κίνδυνο εμφάνισης εμφράγματος του μυοκαρδίου, το κάπνισμα και την υψηλή χοληστερόλη. Θεωρώντας τα ενδεχόμενα, καπνιστής με υψηλή χοληστερόλη (Α), καπνιστής με μη υψηλή χοληστερόλη (Β), μη καπνιστής με υψηλή χοληστερόλη (Γ), και μη καπνιστής με μη υψηλή χοληστερόλη (Δ), το ενδεχόμενο

(i) $(A \cup B) \cap (B \cup \Delta)$ δηλώνει καπνιστή με μη υψηλή χοληστερόλη.
(ii) $(B \cup \Delta)' \cap A$ δηλώνει μη καπνιστή με υψηλή χοληστερόλη.
(iii) $(\Gamma \cup \Delta)'$ δηλώνει μη καπνιστή.
(iv) $B' - \Delta$ δηλώνει άτομο με μη υψηλή χοληστερόλη.

(γ-3) Από ένα δοχείο που περιέχει 10 σφαίρες αριθμημένες από το 1 έως το 10, επιλέγονται με τυχαίο τρόπο 2 σφαίρες χωρίς επανατοποθέτηση. Τα ενδεχόμενα Α={στην επιλογή της πρώτης σφαίρας εμφανίζεται περιττός αριθμός}, και Β={στην επιλογή και των δύο σφαιρών εμφανίζονται άρτιοι αριθμοί}

(i) αποτελούν το ένα συμπλήρωμα του άλλου.
(ii) είναι ασυμβίβαστα.
(iii) είναι ανεξάρτητα.
(iv) εξαντλούν από κοινού το δειγματικό χώρο.

(δ-3) Έστω δύο από κοινού κατανεμημένες τ.μ. X και Y. Τότε
(i) $\mathrm{var}(3X+2Y)=9\,\mathrm{var}(X)+4\,\mathrm{var}(Y)$.
(ii) $E(2X-3Y+4)=2E(X)-3E(Y)+4$.
(iii) $f(x,y)\le 1$ για κάθε $(x,y)\in R^2$.
(iv) $\rho=0$ αν $X=2Y$.

(ε-3) Έστω μια τ.μ. X. Τότε
(i) $\mathrm{var}(E(X))=E(\mathrm{var}(X))$.
(ii) $f(x)=P(X=x)$ για κάθε $x\in R$.
(iii) $P(-1\le X\le 3)\ge 3/4$ αν $E(X)=\mathrm{var}(X)=1$.
(iv) $P(-a\le -X<-b)=F(-b)-F(-a)$ για κάθε $a,b\in R$.

<u>Άσκηση 4 (12 Μονάδες)</u>

Ασφαλιστική εταιρεία κατατάσσει τους πελάτες της που ασφαλίζονται σε κάποιο πρόγραμμα ασφάλισης «προσωπικού ατυχήματος» σε τρεις βασικές κατηγορίες: πελάτες χαμηλού, μεσαίου και υψηλού κινδύνου. Έστω ότι το 75% των ασφαλισμένων σε αυτό το πρόγραμμα έχουν ταξινομηθεί στην κατηγορία χαμηλού κινδύνου, το 15% στην κατηγορία μεσαίου κινδύνου και το 10% στην κατηγορία υψηλού κινδύνου. Από στατιστικές μελέτες έχει εκτιμηθεί ότι κατά τη διάρκεια ενός έτους η πιθανότητα να καταθέσει αίτηση αποζημίωσης λόγω ατυχήματος ένας ασφαλισμένος χαμηλού, μεσαίου και υψηλού κινδύνου είναι 0.05, 0.15 και 0.30, αντίστοιχα. Για έναν ασφαλισμένο της εταιρείας στο συγκεκριμένο πρόγραμμα βρείτε τις πιθανότητες:

(α-3) Να καταθέσει αίτηση αποζημίωσης κατά τη διάρκεια ενός έτους.

(β-4) Να είναι υψηλού κινδύνου όταν έχει καταθέσει αίτηση αποζημίωσης κατά τη διάρκεια ενός έτους.

(γ-5) Να είναι χαμηλού κινδύνου όταν κατά τη διάρκεια των δύο πρώτων ετών του προγράμματος κατέθεσε αίτηση αποζημίωσης μόνο κατά τη διάρκεια του πρώτου έτους.

<u>Άσκηση 5 (12 Μονάδες)</u>

Η σ.π.π. μιας συνεχούς τ.μ. X δίνεται από τον τύπο

$$f(x)=\begin{cases} cx(1-x), & 0<x<1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α-2) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.

(β-3) Να βρεθεί η α.σ.κ. της τ.μ. X.

(γ-4) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να πάρει η τ.μ. X τιμή

(i) μεγαλύτερη από 0.4 ,

(ii) μικρότερη του 0.3 ή μεγαλύτερη του 0.7.

(δ-3) Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. X.

Άσκηση 6 (13 Μονάδες)

Ένα προϊόν προσδιορίζεται από δύο χαρακτηριστικά. Έστω X η τ. μ. που δηλώνει το πρώτο χαρακτηριστικό με δυνατές τιμές 1, 2 και 3, και Y η τ.μ. που δηλώνει το δεύτερο χαρακτηριστικό με δυνατές τιμές 0, 1, 2, 3 και 4. Η κ.σ.π. των τ.μ. X και Y δίνεται στον παρακάτω πίνακα

x \ y	0	1	2	3	4
1	1/32	1/16	1/8	3/32	1/16
2	1/32	1/32	1/16	3/32	1/8
3	1/8	1/16	0	2/32	1/32

(α-4) Βρείτε τις περιθώριες σ.π. των τ.μ. X, Y.

(β-2) Εξετάστε αν οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες ή όχι.

(γ-3) Βρείτε τη δεσμευμένη σ.π. της X όταν $Y = 1$ και επαληθεύστε ότι είναι νόμιμη σ.π.

(δ-4) Αν για ένα προϊόν γνωρίζουμε ότι η τιμή του πρώτου χαρακτηριστικού είναι ίση με 2 ($X = 2$), να υπολογιστεί η πιθανότητα το δεύτερο χαρακτηριστικό να πάρει τιμή μεγαλύτερη του 1.

Άσκηση 7 (11 Μονάδες)

Η κ.σ.π. των τ.μ. X και Y δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & x>0,\ y>0,\ x+y\le 1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α-3) Επαληθεύστε ότι η παραπάνω κ.σ.π. των τ.μ. X και Y είναι νόμιμη.

(β-4) Βρείτε τις περιθώριες σ.π.π. των τ.μ. X, Y.

(γ-4) Βρείτε τη δεσμευμένη σ.π.π. της Y όταν $X = x$ $(0 < x < 1)$.

Άσκηση 8 (12 Μονάδες)

Δώστε την κατάλληλη απάντηση (ΣΩΣΤΗ ή ΛΑΘΟΣ) στις παρακάτω προτάσεις. Αιτιολογείστε σύντομα μόνο τις απαντήσεις στις οποίες επιλέξατε ΛΑΘΟΣ.

(α-1.5) Αν $P(A) = 0.35$, $P(B) = 0.25$ και $P(B \mid A) = 0.25$, τότε τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

(β-1.5) Για δύο διακριτές τ.μ. X και Y με κ.σ.π. $f(x,y)$ ισχύει ότι $P(a \le Y \le b) = \sum_{x=a}^{b} \sum_{y} f(x,y)$.

(γ-1.5) Η πιθανότητα αστοχίας ενός συστήματος, που αποτελείται από όμοια και ανεξάρτητα υποσυστήματα, συνδεδεμένα σε σειρά, αυξάνεται όσο περισσότερα υποσυστήματα προσθέτουμε στο σύστημα.

(δ-1.5) Αν A, B είναι δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε τα ενδεχόμενα A', B δεν είναι ανεξάρτητα.

(ε-1.5) Η α.σ.κ. μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής δεν είναι πάντοτε συνεχής συνάρτηση σε όλο το πεδίο ορισμού της.

(στ-1.5) Έστω X μια συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f(x)$ και μέση τιμή $E(X)$. Τότε ισχύει η σχέση $E(E(X)) = \sum_x E(X) f(x)$.

(ζ-1.5) Η πιθανότητα της τομής δύο ενδεχομένων μπορεί να είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των πιθανοτήτων των δύο ενδεχομένων.

(η-1.5) Η μέση τιμή μ μιας διακριτής τ.μ. X με δυνατές τιμές $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ $(k \geq 2)$, μπορεί να είναι μικρότερη του x_1 ή μεγαλύτερη του x_k.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Άσκηση 1

α) Οι τρόποι που μπορούν να μπουν τα 11 βιβλία σε σειρά είναι 11! (πρόκειται για διάταξη 11 αντικειμένων).

β) Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να πρώτα τα 4 βιβλία των μαθηματικών και τελευταία 3 βιβλία φυσικής είναι 4!4!3! (οι τρόποι να διατάξουμε τα 4 βιβλία μαθηματικών επί τους τρόπους να διατάξουμε τα 4 βιβλία χημείας και βιολογίας επί τους τρόπους να διατάξουμε τα 3 βιβλία φυσικής). Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{4!\,4!\,3!}{11!}$$

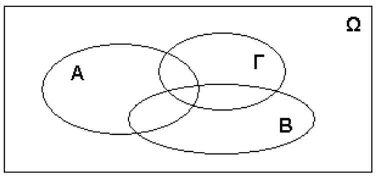
γ) Η τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε τη σειρά των θεματικών ενοτήτων είναι 4! Τα βιβλία των μαθηματικών μπορούν να διαταχθούν με 4! τρόπους, της φυσικής 3! της χημείας 2! και της βιολογίας 2! Συνεπώς οι δυνατοί τρόποι είναι 4!4!3!2!2! Τελικά η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{4!\,4!\,3!\,2!\,2!}{11!}$$

δ) Η πιθανότητα μη επιλογής βιβλίου μαθηματικών ή βιολογίας στην πρώτη προσπάθεια είναι $\frac{5}{11}$, στη δεύτερη $\frac{4}{10}$ και στην τρίτη $\frac{3}{9}$. Τελικά η πιθανότητα μη επιλογής βιβλίου μαθηματικών ή βιολογίας στις τρεις προσπάθειες είναι $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{11\cdot 10\cdot 9}$. Συνεπώς η πιθανότητα να επιλεγεί τουλάχιστον ένα βιβλίο μαθηματικών ή βιολογίας είναι $1-\frac{5\cdot 4\cdot 3}{11\cdot 10\cdot 9}$.

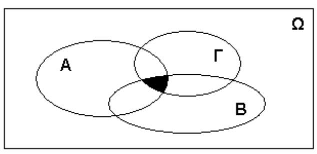
Άσκηση 2

α)

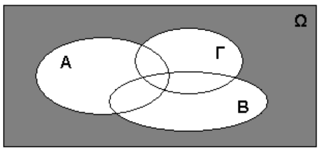


β) Τα ενδεχόμενα δεν εξαντλούν το δειγματικό χώρο Ω. Αυτό γιατί το ενδεχόμενο $(A \cup B \cup \Gamma)'$ που είναι το ενδεχόμενο το Σ2 να μην βρίσκεται πιο κοντά στο κέντρο, το Σ1 να απέχει απόσταση από το κέντρο μικρότερη ή ίση του r/2 και τα Σ1, Σ2 να απέχουν και τα δύο απόσταση μικρότερη ή ίση του r/2 από το κέντρο ή και τα δύο απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του r/2 είναι μη κενό. Περιέχει π.χ. το ενδεχόμενο ο Σ1 να απέχει απόσταση r/4 από το στόχο και ο Σ2 να βρίσκεται στην ίδια ευθεία με το κέντρο και το Σ1 σε απόσταση r/4 από το Σ1 και r/2 από το κέντρο.

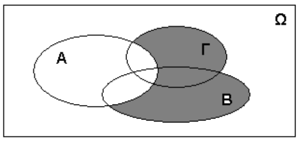
γ) Το $A \cap B \cap \Gamma$



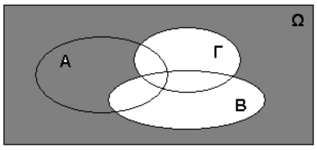
Το $A' \cap B' \cap \Gamma'$



Το $(B \cup \Gamma) - A$



Το $A' \cup (B' \cap \Gamma')$



δ) Τα ενδεχόμενα είναι Γ, το ενδεχόμενο και ο Σ1 και ο Σ2 να είναι σε απόσταση μικρότερη του r/2 και το ενδεχόμενο και ο Σ1 και ο Σ2 να είναι σε απόσταση μεγαλύτερη του r/2.

Άσκηση 3

α)

I. Η μελέτη δεν είναι αναλυτική γιατί δεν χρησιμοποιείται για να δοκιμαστεί κάποια υπόθεση.
II. Δεν είναι ποσοτικό γιατί αφορά το αν φοροδιαφεύγουν ή όχι τα καταστήματα. Απλά κωδικοποιείται με βάση το 0 ή το 1.
III. Το δείγμα αποτελείται από τα 100 μαγαζιά. Ο πληθυσμός είναι όλα τα εμπορικά καταστήματα της Πάτρας.
IV. Σωστό.

β)

I. Σωστό.
II. Όχι, δηλώνει καπνιστή με υψηλή χοληστερόλη.
III. Όχι, δηλώνει καπνιστή.
IV. Όχι, δηλώνει καπνιστή με υψηλή χοληστερόλη.

γ)

I. Όχι, π.χ. το ενδεχόμενο να βγεί άρτιος στην πρώτη δοκιμή και περιττός στην πρώτη δεν περιέχεται σε κανένα από τα δύο ενδεχόμενα.

II. Σωστό.

III. Είναι $P(A \cap B) = 0$, ενώ $P(A)P(B) > 0$ άρα $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ και συνεπώς τα ενδεχόμενα δεν είναι ανεξάρτητα.

IV. Όχι, όπως είδαμε στο I υπάρχει ενδεχόμενο που δεν ανήκει σε κανένα από τα δύο.

δ)

I. Για να ισχύει αυτό πρέπει οι Χ και Υ να είναι ασυσχέτιστες.

II. Σωστό.

III. Λάθος.

IV. Λάθος. Αν Χ=2Υ, τότε ρ=1.

ε)

I. Λάθος. Γιατί αν $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \mu \neq 0$ και $\mathrm{var}(X) = \sigma \neq 0$, τότε $var\big(E(X)\big) = var(\mu) = 0$ ενώ $E\big(var(X)\big) = E(\sigma) = \sigma \neq 0$.

II. Λάθος. Αν π.χ. έχουμε συνεχή τ.μ. Χ, τότε $P(X = x_0) = 0$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ενώ το $f(x_0)$ δεν είναι μηδέν για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

III. Σωστό. Από το θεώρημα του Chebyshev έχουμε: $P(|X-1| \geq 2) \leq \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, άρα $P(-1 < X < 3) = P(|X-1| < 2) = 1 - P(|X-1| \geq 2) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ συνεπώς $P(-1 \leq X \leq 3) \geq P(-1 < X < 3) \geq \frac{3}{4}$.

IV. Λάθος, είναι $P(-a \leq -X < -b) = P(b < X \leq a) = F(a) - F(b)$.

Άσκηση 4

α) Έστω A_1, A_2, A_3 είναι το ενδεχόμενο να ανήκει ένας ασφαλισμένος σε μια από τις τρεις κατηγορίες κινδύνου (χαμηλού, μεσού, υψηλού) και Β το ενδεχόμενο να καταθέσει αίτηση αποζημίωσης. Τότε: $P(B|A_1) = 0.05$, $P(B|A_2) = 0.15$, $P(B|A_3) = 0.3$. Άρα $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) =$ $= 0.75 \cdot 0.05 + 0.15 \cdot 0.15 + 0.1 \cdot 0.3$ =0.09.

β) Από το θεώρημα του Bayes έχουμε: $P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)} = \frac{0.3 \cdot 0.1}{0.09} = \frac{1}{3}$.

γ) Έστω Γ το ενδεχόμενο ένας ασφιλισμένος να καταθέσει αίτηση αποζημίωσης μόνο τον πρώτο χρόνο μιας διετίας. Τότε: $P(\Gamma|A_1) = 0.05 \cdot 0.95 = 0.0475$, $P(\Gamma|A_2) = 0.15 \cdot 0.85 = 0.1275$, $P(\Gamma|A_3) = 0.3 \cdot 0.7 = 0.21$. Από το θεώρημα του Bayes έχουμε:

$$P(A_1|\Gamma) = \frac{P(\Gamma|A_1)P(A_1)}{P(A_1)P(\Gamma|A_1) + P(A_2)P(\Gamma|A_2) + P(A_3)P(\Gamma|A_3)} = \frac{0.035625}{0.165} = 0.2159$$

Άσκηση 5

α) Πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 cx(1-x)dx = 1 \Rightarrow \frac{c}{6} = 1 \Rightarrow c = 6$.

β) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X είναι η $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Άρα:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \ \text{αν } x \le 0 \\ 3x^2 - 3x^3, \text{ αν } 0<x<1 \\ 1, \text{ αν } x \ge 1 \end{cases}$$

γ)

I. Θέλουμε την πιθανότητα $P(X > 0.4) = 1 - P(X \le 0.4) = 1 - F_X(0.4) = 1 - 0.352 = 0.648$.

II. Θέλουμε την πιθανότητα $P(X < 0.3 \text{ ή } X > 0.7) = 1 - P(0.3 \le X \le 0.7) =$ $= 1 - P(0.3 < X \le 0.7) = 1 - (F_X(0.7) - F_X(0.3)) = 0.432$

δ) Έχουμε $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x^3)dx = \frac{7}{20}$ και $var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(X - \frac{7}{20}\right)^2 dx = \int_0^1 \left[(3x^2 - 2x^3) - \frac{7}{20}\right]^2 dx = \frac{571}{5600}$.

Άσκηση 6

α) Αν p_{ij} είναι η πιθανότητα $X = i, Y = j$, τότε για τις περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας f_X, f_Y έχουμε: $f_X(x) = \sum_{y=0}^{4} p_{xy}$ και $f_Y(y) = \sum_{x=1}^{3} p_{xy}$. Άρα:

$$p_{1Y} = f_X(1) = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

$$p_{2Y} = f_X(2) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{3}{32} + \frac{1}{8} = \frac{11}{32}$$

$$p_{3Y} = f_X(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + 0 + \frac{2}{32} + \frac{1}{32} = \frac{9}{32}$$

$f_X(x) = 0$, αν $x \neq 1,2,3$. Όμοια

$$p_{X0} = f_Y(0) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$$

$$p_{X1} = f_Y(1) = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} = \frac{5}{32}$$

$$p_{X2} = f_Y(2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + 0 = \frac{3}{16}$$

$$p_{X3} = f_Y(3) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{2}{32} = \frac{8}{32}$$

$$p_{X4} = f_Y(4) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{7}{32}$$

$f_Y(y) = 0$, αν $y \neq 0,1,2,3,4$.

β) Αν ήταν οι X,Y ανεξάρτητες θα είχαμε $p_{ij} = p_{iY}p_{Xj}$ για όλα τα i,j. Παρατηρούμε όμως ότι $\frac{1}{32} = p_{10} \neq \frac{9}{128} = p_{1Y}p_{X0}$. Συνεπώς δεν είναι ανεξάρτητες.

γ) Η δεσμευμένη σ.π. της X όταν Y=1 δίνεται από τη σχέση: $f(x) = \frac{P(X=x, Y=1)}{P(Y=1)}$ άρα $f(1) = \frac{p_{11}}{f_Y(1)} = \frac{2}{5}$, $f(2) = \frac{p_{21}}{f_Y(1)} = \frac{1}{5}$, $f(3) = \frac{p_{31}}{f_Y(1)} = \frac{2}{5}$ και $f(x) = 0$ για $x \neq 1,2,3$. Είναι νόμιμη αφού $f(x) \ge 0$ για κάθε x και $\sum_x f(x) = 1$.

δ) Θέλουμε την πιθανότητα $P(Y > 2|X = 2)$. Έχουμε $P(Y > 2|X = 2) = P(Y = 3|X = 2) + P(Y = 4|X = 2) = \frac{P(X=2,Y=3)}{P(X=2)} + \frac{P(X=2,Y=4)}{P(X=2)} = \frac{p_{23}}{f_X(2)} + \frac{p_{24}}{f_X(2)} = \frac{7}{11}$

.

Άσκηση 7

α) Είναι $f(x,y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Επίσης $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} 24xydydx = 1$. Συνεπώς η κ.σ.π. των τ.χ. X και Y είναι νόμιμη.

β) Είναι $f_X(x) = \int_0^{1-x} 24xydy = 12x^3 - 24x^2 - 12x$, για $0 \leq x \leq 1$ και $f_X(x) = 0$ αλλού και $f_Y(y) = \int_0^{1-y} 24xydy = 12y^3 - 24y^2 - 12y$, για $0 \leq y \leq 1$ και $f_Y(y) = 0$ αλλού.

γ) Η δεσμευμένη σ.π. της Y όταν X=x $(0 < x < 1)$ δίνεται από τη σχέση: $f(y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)} = \frac{24xy}{12x^3-24x^2-12x} = \frac{2y}{x^2-2x-1}$ αν $0 \leq y \leq 1 - x$ και μηδέν αλλού.

Άσκηση 8

α) Σωστό.

β) Λάθος. Ισχύει $P(a \leq Y \leq b) = \sum_x \sum_{y=a}^{b} f(x,y)$.

γ) Σωστό.

δ) Λάθος, αφού αν τα A και B είναι ανεξάρτητα τότε $A \cap B = \emptyset$ και συνεπώς $A' \supseteq B$ και τελικά $A' \cap B = B \neq \emptyset$.

ε) Σωστό.

στ) Λάθος. Αν έχουμε συνεχή τ.μ. X η μέση τιμή μιας συνάρτησης $g(X)$ της X βρίσκεται με ολοκλήρωση.

ζ) Λάθος, γιατί η πιθανότητα της τομής είναι μικρότερη από την πιθανότητα του κάθε συνόλου (αφού η τομή είναι υποσύνολο του κάθε συνόλου) και συνεπώς είναι μικρότερη του αθροίσματός τους.

η) Λάθος, γιατί αν $x_1 < \cdots < x_n$, τότε $x_1 = \frac{x_1+\cdots+x_1}{n} < \mu = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} < \frac{x_n+\cdots+x_n}{n} = x_n$, δηλ. $x_1 < \mu < x_n$.