



ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2013 -2014

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

Βασικά Εργαλεία και Μέθοδοι για τον Έλεγχο της Ποιότητας [ΔΙΠ 50]

1η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Προσοχή: Οι απαντήσεις των ασκήσεων πρέπει να φθάσουν στον Καθηγητή-Σύμβουλο ιδανικά μέχρι την Κυριακή 10/11/2013 και σε καμιά περίπτωση αργότερα από την Τρίτη 12/11/2013.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΟΒΟΛΗ-ΕΚΠΟΝΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΩΝ ΣΤΗ ΔΙΠ 50

1. Μπορείτε να μην υποβάλλετε μόνο 1 από τις 5 εργασίες και πρέπει να συγκεντρώσετε 25 μονάδες στις 4 ή 5 εργασίες που θα υποβάλλετε για να έχετε δικαίωμα συμμετοχής στις εξετάσεις.
2. Πρέπει να τηρείτε τις προθεσμίες υποβολής των εργασιών και να ακολουθείτε πιστά τις οδηγίες που γράφονται στην αρχή κάθε άσκησης ή ερωτήματος.
3. Οι γραπτές εργασίες υποβάλλονται αποκλειστικά ηλεκτρονικά στο χώρο «ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ» (<http://study.eap.gr>). Οι απαντήσεις των ερωτημάτων να γράφονται σε χαρτί μεγέθους Α4. Τα φύλλα της εργασίας θα πρέπει να είναι αριθμημένα και στην πρώτη σελίδα της εργασίας θα πρέπει να αναφέρεται το ονοματεπώνυμό σας. Η εργασία δεν είναι υποχρεωτικό να είναι δακτυλογραφημένη, παρ' όλο που συνιστάται. Αν είναι όμως χειρόγραφη είναι υποχρεωτικό να είναι ευανάγνωστη. Μη γράφετε περισσότερα από αυτά που ζητούνται σε κάθε άσκηση, αφού τα επιπλέον, αν μεν είναι σωστά δεν λαμβάνονται υπ' όψιν, αν όμως είναι λάθος, επηρεάζουν αρνητικά τη βαθμολογία του θέματος.
4. Να βάζετε τις απαντήσεις σας στις ασκήσεις – υποερωτήματα με τη σειρά, όχι ανάκατα.
5. Η σειρά των θεμάτων και των ερωτημάτων στις γραπτές εργασίες δεν ακολουθεί απαραίτητα τη σειρά των περιεχομένων του εκπαιδευτικού υλικού.
6. Μην αντιγράφετε τις εκφωνήσεις! Να γράφετε μόνο τις αιτιολογημένες απαντήσεις σας βάζοντας στην αρχή την αντίστοιχη αρίθμηση της άσκησης και του ερωτήματος που απαντάτε.
7. Σε κάθε ερώτημα να δίνετε έναν (1) μόνο τρόπο λύσης.
8. Αν ένα ερώτημα ζητά σχήμα, να βάζετε το σχήμα στο τέλος της απάντησής σας για το ερώτημα, όχι στο τέλος της άσκησης ή της εργασίας.
9. Αν σε ένα ερώτημα χρησιμοποιείται το πακέτο MINITAB, θα πρέπει να περιέχεται στην απάντησή σας (α) πλήρης περιγραφή της διαδικασίας του MINITAB που ακολουθήσατε, (β) αντίγραφο της εκτύπωσης του session window του MINITAB και (γ) σχολιασμός ή ερμηνεία του αποτελέσματος του MINITAB. Τα (α) και (γ) πρέπει να μπαίνουν στην απάντηση του ερωτήματος, ενώ το (β) πρέπει να περιέχεται στο τέλος της άσκησης στην οποία ανήκει το ερώτημα (σε καμιά περίπτωση στο τέλος της εργασίας).
10. Δεν θα βαθμολογούνται απαντήσεις στις οποίες γίνεται χρήση άλλου στατιστικού πακέτου (εκτός του MINITAB). Επιτρέπεται η χρήση του Excel για τη διενέργεια μόνον απλών αριθμητικών υπολογισμών.
11. Στα ερωτήματα που χρειάζεται να χρησιμοποιήσετε μια σχέση (έναν τύπο), πρέπει να γράφετε πρώτα τη λογική ή το επιχειρήμα για την επιλογή της σχέσης, ακολούθως να γράφετε τη γενική μορφή της σχέσης, μετά να κάνετε αντικατάσταση των τιμών και, τέλος, να βρίσκετε το αποτέλεσμα.
12. Στις προτάσεις Σωστού-Λάθους πρέπει απαραίτητα να γράφετε την επιλογή σας (Σωστή ή Λάθος) και στις προτάσεις που δίνετε απάντηση «Λάθος» να δίνετε σαφή αιτιολόγηση, η οποία να περιέχει εντοπισμό του λάθους, και όχι να παραπέμπετε σε ολόκληρες παραγράφους ή σελίδες του εκπαιδευτικού υλικού. Ομοίως, στα ερωτήματα πολλαπλής επιλογής, πρέπει απαραίτητα να επιλέξετε τη σωστή επιλογή, π.χ. «η (i) είναι η Σωστή» και να αιτιολογήτε με σαφήνεια την απάντησή σας. Αν δεν υπάρχει ξεκάθαρη επιλογή σε ένα ερώτημα Σωστού-Λάθους (Σωστή ή Λάθος) ή σε ένα ερώτημα πολλαπλής επιλογής (ποια επιλογή είναι η Σωστή) το ερώτημα θα μηδενίζεται.
13. Μπορείτε να ανταλλάσσετε απόψεις για τη σωστή απάντηση των ασκήσεων, αλλά δεν επιτρέπονται σε καμιά περίπτωση αντιγραφές. Εάν υποβληθούν από δύο ή περισσότερους φοιτητές πανομοιότυπες απαντήσεις σε μια ή περισσότερες ασκήσεις (έστω και με διακοσμητικές αλλαγές για να φαίνονται δήθεν διαφορετικές), θα μηδενίζονται οι εργασίες όλων των εμπλεκόμενων φοιτητών (απόφαση της Ομάδας Διδακτικού Προσωπικού της ΔΙΠ 50).

Βαθμολόγηση: Οι μονάδες που αντιστοιχούν σε κάθε άσκηση και σε κάθε ερώτημα χωριστά δίνονται μέσα σε παρένθεση (σύνολο 100 μονάδες).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1^{ης} ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Άσκηση 1 (12 μονάδες)

Δώστε την κατάλληλη απάντηση (ΣΩΣΤΗ ή ΛΑΘΟΣ) στις τελευταίες προτάσεις των (α)-(ζ) και στην πρόταση (η). Αιτιολογήστε σύντομα μόνο τις απαντήσεις στις οποίες επιλέξατε ΛΑΘΟΣ.

(α-1.5) Έστω μια τ.μ. X . Τότε $\text{var}(E(X)) = E(\text{var}(X))$.

(β-1.5) Έστω μια τ.μ. X . Τότε $P(-a \leq -X < -b) = F_X(-b) - F_X(-a)$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και $b < a$.

(γ-1.5) Έστω δύο από κοινού κατανομημένες τ.μ. X και Y . Τότε $E(3X - 2Y + 4) = 3E(X) - 2E(Y) + 4$.

(δ-1.5) Στην κλήρωση του Λόττο εισάγονται στην κληρωτίδα οι αριθμοί 1, 2, ..., 49 και με τυχαίο τρόπο επιλέγονται έξι αριθμοί, διαφορετικοί ο ένας από τον άλλο. Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων της κλήρωσης ισούται με το πλήθος των μεταθέσεων των 49 αριθμών.

(ε-1.5) Ένα σύστημα αποτελείται από πέντε ανεξάρτητα υποσυστήματα συνδεδεμένα σε σειρά. Έστω p η αξιοπιστία καθενός υποσυστήματος. Τότε η αξιοπιστία του συστήματος ισούται με $1 - (1 - p)^5$.

(στ-1.5) Έστω δύο συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_1(x)$ και $f_2(x)$. Τότε η συνάρτηση $f(x) = \frac{4f_1(x) + 3f_2(x)}{6}$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

(ζ-1.5) Έστω ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι μεγαλύτερη από αυτή του συμπληρώματός του, A' . Τότε η πιθανότητα του A είναι μικρότερη από 0.5.

(η-1.5) Το πρώτο τεταρτημόριο της κατανομής μιας συνεχούς τ.μ. X ισούται με 25%.

Άσκηση 2 (12 μονάδες)

Έρευνα σε μια ευρωπαϊκή πόλη καταγράφει τον αριθμό των τηλεοράσεων σε κάθε νοικοκυριό. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα αποτελέσματα της έρευνας.

Αριθμός τηλεοράσεων	0	1	2	3	4	5
Αριθμός νοικοκυριών	1211	33279	38861	18837	7684	2482

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που δηλώνει τον αριθμό των τηλεοράσεων σε ένα τυχαία επιλεγμένο νοικοκυριό της πόλης. Να υπολογισθεί:

(α-2) Η συνάρτηση πιθανότητας της X .

(β-2) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X .

(γ-4) Η πιθανότητα να υπάρχουν τέσσερις τηλεοράσεις σε ένα νοικοκυριό, αν γνωρίζουμε ότι έχει τουλάχιστον δύο τηλεοράσεις.

(δ-1) Η μέση τιμή της X .

(ε-3) Η διασπορά της X .

Άσκηση 3 (12 μονάδες)

Ο χρόνος (σε ώρες) που απαιτείται για την φόρτιση μιας συγκεκριμένης μπαταρίας όταν είναι πλήρως αφόρτιστη προσεγγίζεται ικανοποιητικά από μια συνεχή τυχαία μεταβλητή T με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(t) = \begin{cases} c(3t^2 - 2t), & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α-2) Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς c .

(β-3) Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της T .

(γ-2) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι τουλάχιστον 2.5 ώρες ο χρόνος φόρτισης μιας μπαταρίας;

(δ-2) Βρείτε τη μέση τιμή της T .

(ε-3) Βρείτε τη διασπορά της T .

Άσκηση 4 (16 μονάδες)

Μια μεγάλη αποθήκη-ψυγείο ψύχεται από δυο μηχανήματα A και B. Η επιθυμητή μέγιστη θερμοκρασία στο εσωτερικό της αποθήκης, έστω a °C, επιλέγεται στο θερμοστάτη. Καθένα από τα δυο μηχανήματα έχει ενσωματωμένο θερμομέτρο που σημειώνει τη θερμοκρασία στο εσωτερικό της αποθήκης στο σημείο που είναι τοποθετημένο το μηχάνημα. Όταν η ένδειξη του θερμομέτρου ενός μηχανήματος φθάσει τους a °C το μηχάνημα ξεκινά τη λειτουργία του. Κατόπιν, όταν η ένδειξη του θερμομέτρου του μηχανήματος φθάσει τους $(a-3)$ °C σταματά, και επαναλειτουργεί όταν η ένδειξη του θερμομέτρου του φθάσει ξανά τους a °C. Με X (αντίστοιχα Y) συμβολίζουμε το χρόνο σε λεπτά που μεσολαβεί από τη στιγμή που θα σταματήσει να λειτουργεί το μηχάνημα A (αντίστοιχα B) μέχρι τη στιγμή που θα επαναλειτουργήσει. Η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X, Y δίνεται από τον τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2(x+2y)}{13}, & 1 < x < 2, 2 < y < 3 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α-2) Ποια είναι η πιθανότητα το πρώτο μηχάνημα να επαναλειτουργήσει μετά από 1.5 λεπτό και το δεύτερο μηχάνημα να επαναλειτουργήσει πριν τα 2.5 λεπτά;

(β-4) Βρείτε τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των X και Y .

(γ-2) Είναι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y ανεξάρτητες;

(δ-4) Αν είναι γνωστό ότι το πρώτο μηχάνημα επαναλειτουργεί μετά από 1.5 λεπτό ακριβώς, ποια είναι η πιθανότητα το δεύτερο μηχάνημα να επαναλειτουργήσει μετά από 2.5 λεπτά;

(ε-4) Υπολογίστε τη συνδιασπορά των X και Y .

Άσκηση 5 (12 μονάδες)

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που δηλώνει τον αριθμό των βλαβών που παρουσιάζει ένα ψηφιακό μηχάνημα ελέγχου κατά τη διάρκεια μιας ημέρας. Έχουν καταγραφεί έως και 3 βλάβες την ημέρα. Έστω Y η τυχαία μεταβλητή που δηλώνει τον αριθμό των κλήσεων που γίνονται μέχρις ότου ένας τεχνικός να διορθώσει τη βλάβη. Η κοινή συνάρτηση πιθανότητας των X και Y είναι η παρακάτω:

		x		
		1	2	3
y	1	0.05	0.05	0.10
	2	0.05	0.10	0.35
	3	0.00	0.20	0.10

(α-2) Βρείτε τις περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των X και Y .

(β-1) Υπολογίστε την πιθανότητα να έχουμε τουλάχιστον δύο βλάβες και τουλάχιστον δύο κλήσεις.

(γ-2) Υπολογίστε τη μέση τιμή της X και τη μέση τιμή της Y .

(δ-2) Βρείτε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της Y όταν $X = 2$.

(ε-2) Υπολογίστε την πιθανότητα να έχουμε τουλάχιστον δύο βλάβες, όταν έχουν γίνει δύο κλήσεις.

(στ-3) Υπολογίστε τη συνδιασπορά των X και Y .

Άσκηση 6 (10 μονάδες)

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση, ανάμεσα στις (i), (ii), (iii) ή (iv), των παρακάτω πέντε ερωτημάτων. Αιτιολογήστε σύντομα την απάντησή σας.

(α-2) Παρακάτω δίνονται τέσσερα ζεύγη τυχαίων μεταβλητών. Ποιο από αυτά έχει το μεγαλύτερο συντελεστή συσχέτισης ρ ;

- i) (X, X^2)
- ii) $(X, 2X)$
- iii) $(X, -X^2)$
- iv) $(X, X^3 + 5)$.

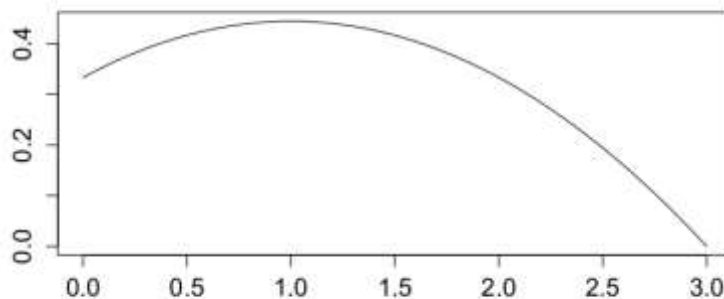
(β-2) Από μία συνήθη τράπουλα (52 χαρτιών) επιλέγουμε στην τύχη 4 χαρτιά χωρίς επανατοποθέτηση. Ποιο από τα παρακάτω ενδεχόμενα έχει τη μικρότερη πιθανότητα;

- i) Και τα 4 χαρτιά είναι άσοι.
- ii) Τα 4 χαρτιά περιλαμβάνουν ένα σπαθί, ένα μπαστούνι, ένα καρό κι ένα κούπα.
- iii) Και τα 4 χαρτιά είναι καρό.
- iv) Κανένα από τα 4 χαρτιά δεν είναι αριθμός.

(γ-2) Έστω ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ισχύουν τα ακόλουθα: $P(A)=0.7$, $P(B)=0.4$ και $P(A \cup B)=0.82$. Τι από τα παρακάτω ισχύει;

- i) Τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα αλλά όχι ασυμβίβαστα.
- ii) Τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα αλλά όχι ανεξάρτητα.
- iii) Τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα και ασυμβίβαστα.
- iv) Τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ούτε ανεξάρτητα ούτε ασυμβίβαστα.

(δ-2) Σε τι είδους συνάρτηση είναι δυνατό να αντιστοιχεί η παρακάτω γραφική παράσταση;



- i) Αθροιστική συνάρτηση κατανομής διακριτής τυχαίας μεταβλητής.
- ii) Αθροιστική συνάρτηση κατανομής συνεχούς τυχαίας μεταβλητής.
- iii) Συνάρτηση πιθανότητας.
- iv) Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

(ε-2) Έστω τρία ενδεχόμενα A , B και Γ . Ποιο από τα παρακάτω δηλώνει το ενδεχόμενο «συμβαίνει το A και μόνο ένα από τα B και Γ »;

- i) $A \cap (B \cup \Gamma)$.
- ii) $A \cap (B \cap \Gamma)$.
- iii) $A \cap [(B \cap \Gamma)']$.
- iv) $A \cap [(B' \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma')]$.

Άσκηση 7 (12 μονάδες)

Η τελική φάση ενός τηλεοπτικού τηλεπαιχνιδιού παίζεται ως εξής. Ο παίκτης πρέπει να επιλέξει στην τύχη ανάμεσα σε 4 φωτεινά κουμπιά. Το ένα κρύβει χρηματικό έπαθλο 10.000 ευρώ ενώ τα άλλα τρία δεν κρύβουν τίποτα.

Πριν διαλέξει κουμπί ο παίκτης απαντά σε μία δύσκολη ερώτηση. Αν η απάντηση είναι σωστή τότε ο υπολογιστής του παιχνιδιού αποφασίζει με τυχαίο τρόπο αν θα σβήσουν κανένα, ένα ή δύο από τα κουμπιά που δεν κρύβουν το έπαθλο. Έστω ότι οι πιθανότητες σβησίματος είναι:

- 0.5 να μην σβήσει κανένα κουμπί
- 0.3 να σβήσει ένα κουμπί
- 0.2 να σβήσουν δύο κουμπιά

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις παίρνοντας ως γεγονός ότι ο παίκτης απάντησε σωστά στην ερώτηση.

(α-3) Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει το έπαθλο;

(β-2) Ποια είναι η πιθανότητα να σβήσει δύο κουμπιά ο υπολογιστής και ο παίκτης να μην κερδίσει το έπαθλο;

(γ-4) Έστω ότι χτύπησε το τηλέφωνο σας και χάσατε τη συνέχεια του παιχνιδιού. Γυρνώντας βλέπετε ότι ο παίκτης πανηγυρίζει γιατί κέρδισε το έπαθλο. Ποια είναι η πιθανότητα να είχε σβήσει ο υπολογιστής ένα φωτεινό κουμπί;

(δ-3) Το τηλεπαιχνίδι αντιστοιχεί σε ένα τυχαίο πείραμα. Βρείτε το δειγματικό χώρο του.

Άσκηση 8 (14 μονάδες)

Ένα τμήμα μιας Θεματικής Ενότητας στο ΕΑΠ αποτελείται από 15 φοιτητές, 10 άνδρες και 5 γυναίκες.

(α-1) Έστω ότι οι 15 φοιτητές μπαίνουν στην αίθουσα της Ομαδικής Συμβουλευτικής Συνάντησης (Ο.Σ.Σ.) ξεχωριστά (ο καθένας μόνος του και ο ένας μετά τον άλλο). Πόσες διαφορετικές σειρές άφιξης τους υπάρχουν;

(β-5) Ποια είναι η πιθανότητα να μπου οι 5 γυναίκες στην αίθουσα διαδοχικά, δηλαδή χωρίς να παρεμβάλλεται άνδρας ανάμεσά τους;

(γ-3.5) Ο διδάσκων επιλέγει στην τύχη 4 φοιτητές για να ετοιμάσουν μία παρουσίαση για την επόμενη Ο.Σ.Σ. Όλοι οι φοιτητές έχουν την ίδια πιθανότητα να επιλεγούν. Ποια είναι η πιθανότητα η επιλεγμένη τετράδα να περιλαμβάνει τους δύο καλύτερους φοιτητές της τάξης που είναι ο Γιάννης και η Μαρία;

(δ-4.5) Έστω ότι ο διδάσκων αποφασίζει τελικά να επιλέξει δύο άνδρες και δύο γυναίκες για την παρουσίαση. Όλοι οι άνδρες έχουν την ίδια πιθανότητα να επιλεγούν και το ίδιο ισχύει και για τις γυναίκες. Ποια είναι η πιθανότητα η επιλεγμένη τετράδα να περιλαμβάνει το Γιάννη και τη Μαρία;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Άσκηση 1

(α) ΛΑΘΟΣ

Είναι: $\text{var } E(X) = 0$ αλλά δεν συμβαίνει απαραίτητα το ίδιο και για $E(\text{var}(X))$.

(β) ΛΑΘΟΣ

Το σωστό είναι: $P -\alpha < -X \leq -\beta = F_X(-\beta) - F_X(-\alpha)$

(γ) ΣΩΣΤΟ

(δ) ΛΑΘΟΣ

Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων της κλήρωσης είναι ίσο με τους συνδυασμούς των 49

αριθμών άνα 6 : $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!}$.

(ε) ΛΑΘΟΣ

Η αξιοπιστία του συστήματος ισούται με p^5 .

(στ) ΛΑΘΟΣ

Υποθέτοντας ότι η X είναι συνεχής παίρνουμε: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{4}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx + \frac{3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)dx = \frac{7}{6} > 1$,

αφού $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx = 1$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)dx = 1$ ως συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας.

(ζ) ΛΑΘΟΣ

Η πιθανότητα του ενδεχομένου A θα είναι μεγαλύτερη του 0.5 αφού τα ενδεχόμενα A και A' είναι συμπληρωματικά.

(η) ΛΑΘΟΣ

Είναι ο αριθμός c για τον οποίο $P X \leq c = 0.25$

Άσκηση 2

(α)

Η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή. Η συνάρτηση πιθανότητας ορίζεται ως εξής: $f(x_n) = P(X = x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ και παίρνει τιμές:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1211}{102354}, & x=0 \\ \frac{33279}{102354}, & x=1 \\ \frac{38861}{102354}, & x=2 \\ \frac{18837}{102354}, & x=3 \\ \frac{7684}{102354}, & x=4 \\ \frac{2482}{102354}, & x=5 \end{cases}$$

ενώ είναι ίση με μηδέν σπουδήποτε αλλού.

- (β) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι η εξής:

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^r f(x_n), & r \leq x < r+1 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1211}{102354}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{34490}{102354}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{73351}{102354}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{92188}{102354}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{99872}{102354}, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & 5 \leq x \end{cases}$$

- (γ) Πρόκειται για τη δεσμευμένη πιθανότητα: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{7684}{67864}$, όπου A το ενδεχόμενο «ακριβώς 4 τηλεοράσεις» και B το ενδεχόμενο «τουλάχιστον 2 τηλεοράσεις».

(δ)

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot f(x_n) =$$

$$= 0 \cdot \frac{1211}{102354} + 1 \cdot \frac{33279}{102354} + 2 \cdot \frac{38861}{102354} + 3 \cdot \frac{18837}{102354} + 4 \cdot \frac{7684}{102354} + 5 \cdot \frac{2482}{102354} =$$

$$= \frac{210658}{102354}$$

(ε)

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - E(X))^2 f(x_n) = \\ &= \left[0 - \frac{210658}{102354}\right]^2 \cdot \frac{1211}{102354} + \left[1 - \frac{210658}{102354}\right]^2 \cdot \frac{33279}{102354} + \left[2 - \frac{210658}{102354}\right]^2 \cdot \frac{38861}{102354} + \left[3 - \frac{210658}{102354}\right]^2 \cdot \frac{18837}{102354} + \\ &+ \left[4 - \frac{210658}{102354}\right]^2 \cdot \frac{7684}{102354} + \left[5 - \frac{210658}{102354}\right]^2 \cdot \frac{2482}{102354} = 0.05 + 0.36 + 0.00 + 0.16 + 0.28 + 0.21 \approx 1.06 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

(α)

Για να υπολογίσουμε το c θα χρησιμοποιήσουμε τη συνθήκη: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

$$\text{Είναι: } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_2^3 c(3t^2 - 2t) dt = c \left[t^3 - t^2 \right]_2^3 = c \left[(3^3 - 3^2) - (2^3 - 2^2) \right] = 14c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{14}$$

(β)

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , t < 2 \\ \int_2^t \frac{3x^2 - 2x}{14} dx & , 2 \leq t < 3 \\ 1 & , t \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , t < 2 \\ \left[\frac{x^3 - x^2}{14} \right]_2^t & , 2 \leq t < 3 \\ 1 & , t \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , t < 2 \\ \frac{t^3 - t^2 - 4}{14} & , 2 \leq t < 3 \\ 1 & , t \geq 3 \end{cases}$$

(γ)

$$\begin{aligned} \text{Η πιθανότητα είναι: } P(2.5 \leq T) &= 1 - P(T < 2.5) = 1 - F(2.5) = 1 - \frac{2.5^3 - 2.5^2 - 4}{14} = \\ &= 1 - \frac{5.375}{14} = \frac{8.625}{14} \end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_2^3 \frac{t(3t^2 - 2t)}{14} dt = \frac{1}{14} \left[\frac{3t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} \right]_2^3 = \frac{1}{14} \left[\frac{3 \cdot 3^4}{4} - \frac{2 \cdot 3^3}{3} - \left(\frac{3 \cdot 2^4}{4} - \frac{2 \cdot 2^3}{3} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{14} \left(\frac{729}{12} - \frac{216}{12} - \frac{144}{12} + \frac{64}{12} \right) = \frac{1}{14} \frac{433}{12} = \frac{433}{168} \end{aligned}$$

(ε)

$$\begin{aligned} E(T^2) &= \int_2^3 \frac{t^2(3t^2 - 2t)}{14} dt = \frac{1}{14} \left[\frac{3t^5}{5} - \frac{t^4}{2} \right]_2^3 = \frac{1}{14} \left[\frac{3 \cdot 3^5}{5} - \frac{3^4}{2} - \left(\frac{3 \cdot 2^5}{5} - \frac{2^4}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{14} \left(\frac{1458}{10} - \frac{405}{10} - \frac{192}{10} + \frac{80}{10} \right) = \frac{1}{14} \frac{941}{10} = \frac{941}{140}, \text{ οπότε η διασπορά της } T \text{ είναι: } \text{var}(T) = \\ &= E(T^2) - E^2(T) = \frac{941}{140} - \left(\frac{433}{168} \right)^2 = \frac{941}{140} - \frac{187489}{28224} = \frac{189705.6 - 187489}{28224} = \frac{2216.6}{28224} \approx 0.0785 \end{aligned}$$

Άσκηση 4

(α)

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα: $P(1.5 < X, Y < 2.5)$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } P(1.5 < X, Y < 2.5) &= P(1.5 < X < 2, 2 < Y < 2.5) = \int_2^{2.5} \int_{1.5}^2 \frac{2x+4y}{13} dx dy = \\ &= \frac{1}{13} \int_2^{2.5} \left[x^2 + 4yx \right]_{x=1.5}^2 dy = \int_2^{2.5} \left[2^2 + 8y - 1.5^2 + 6y \right] dy = \frac{1}{13} \int_2^{2.5} 2y + 1.75 dy = \\ &= \frac{1}{13} \left[y^2 + 1.75y \right]_2^{2.5} = \frac{1}{13} \left[2.5^2 + 1.75 \cdot 2.5 - 2^2 + 1.75 \cdot 2 \right] = \frac{3.125}{13} \approx 0.24 \end{aligned}$$

(β)

Περιθώρια συνάρτηση της X :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_2^3 \frac{2x+4y}{13} dy = \left[\frac{2xy+2y^2}{13} \right]_{y=2}^3 = \frac{6x+18}{13} - \frac{4x+8}{13} = \frac{2x+10}{13}, \quad 1 < x < 2$$

και $f_X(x) = 0, x \notin (1, 2)$.

Περιθώρια συνάρτηση της Y :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_1^2 \frac{2x+4y}{13} dx = \left[\frac{x^2+4yx}{13} \right]_{x=1}^2 = \frac{4+8y}{13} - \frac{1+4y}{13} = \frac{3+4y}{13}, \quad 2 < y < 3$$

και $f_Y(y) = 0, y \notin (2, 3)$.

(γ)

Για να είναι ανεξάρτητες οι μεταβλητές X και Y πρέπει: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ για κάθε x,y .

$$\text{Για } (x,y) \in [1,2] \times [2,3] \text{ είναι: } f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{2x+10}{13} \cdot \frac{3+4y}{13} = \frac{6x+30+8xy+40y}{13^2}$$

αλλά: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{2x+4y}{13}$. Άρα οι μεταβλητές X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

(δ)

Η πιθανότητα που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι η δεσμευμένη πιθανότητα: $P(2.5 < Y < 3 | X = 1.5)$.

$$\text{Η } Y \text{ έχει δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας: } f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x+2y}{x+5}.$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε: } P(2.5 < Y < 3 | X = 1.5) &= \int_{2.5}^3 \frac{1.5+2y}{1.5+5} dy = \left[\frac{1.5y+y^2}{6.5} \right]_{2.5}^3 = \frac{3 \cdot 1.5 + 3^2 - (1.5 \cdot 2.5 + 2.5^2)}{6.5} = \\ &= \frac{3.5}{6.5} \approx 0.54 \end{aligned}$$

(ε)

$$E(X) = \int_1^2 \frac{x(2x+10)}{13} dx = \frac{1}{13} \left[\frac{2x^3}{3} + 5x^2 \right]_1^2 = \frac{1}{13} \left(\frac{2^4}{3} + 5 \cdot 2^2 - \frac{2}{3} - 5 \right) = \frac{1}{13} \frac{59}{3} = \frac{59}{39}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_2^3 \frac{y(3+4y)}{13} dy = \frac{1}{13} \left[\frac{3y^2}{2} + \frac{4y^3}{3} \right]_2^3 = \frac{1}{13} \left(\frac{3^3}{2} + \frac{4 \cdot 3^3}{3} - \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \frac{4 \cdot 2^3}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{13} \left(\frac{81}{6} + \frac{216}{6} - \frac{36}{6} - \frac{64}{6} \right) = \frac{1}{13} \frac{197}{6} = \frac{197}{78} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X,Y) &= \int_1^2 \int_2^3 \left(xy \frac{2x+4y}{13} \right) dy dx = \int_1^2 \int_2^3 \left(\frac{2x^2y+4y^2x}{13} \right) dy dx = \frac{1}{13} \int_1^2 \left[x^2y^2 + \frac{4y^3x}{3} \right]_{y=2}^3 dx = \\ &= \frac{1}{13} \int_1^2 \left(x^2 3^2 + \frac{4 \cdot 3^3 x}{3} \right) - \left(x^2 2^2 + \frac{4 \cdot 2^3 x}{3} \right) dx = \frac{1}{13} \int_1^2 \left(5x^2 + \frac{76}{3}x \right) dx = \frac{1}{13} \left[\frac{5}{3}x^3 + \frac{38}{3}x^2 \right]_1^2 = \\ &= \frac{5 \cdot 2^3 + 38 \cdot 2^2 - \left(\frac{5}{3} + 38 \right)}{39} = \frac{149}{39} \end{aligned}$$

Οπότε η συνδιασπορά είναι :

$$C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{149}{39} - \frac{59}{39} \frac{197}{78} = \frac{11622}{3042} - \frac{11623}{3042} = -\frac{1}{3042}$$

Άσκηση 5

(α)

Ο τύπος της περιθώριας συνάρτησης πιθανότητας για την X είναι: $f_X(x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} f(x_i, y_j)$

$$\text{Είναι: } f_X(1) = f(1,1) + f(1,2) + f(1,3) = 0.05 + 0.05 + 0.00 = 0.10$$

$$f_X(2) = f(2,1) + f(2,2) + f(2,3) = 0.05 + 0.10 + 0.20 = 0.35$$

$$f_X(3) = f(3,1) + f(3,2) + f(3,3) = 0.10 + 0.35 + 0.10 = 0.55$$

$$\text{Οπότε: } f_X(x) = \begin{cases} 0.10, & x = 1 \\ 0.35, & x = 2 \\ 0.55, & x = 3 \\ 0, & x \notin 1, 2, 3 \end{cases}$$

Ο τύπος της περιθώριας συνάρτησης πιθανότητας για την Y είναι: $f_Y(y_j) = \sum_{i=0}^{\infty} f(x_i, y_j)$

$$\text{Άρα: } f_Y(1) = f(1,1) + f(2,1) + f(3,1) = 0.05 + 0.05 + 0.10 = 0.20$$

$$f_Y(2) = f(1,2) + f(2,2) + f(3,2) = 0.05 + 0.10 + 0.35 = 0.50$$

$$f_Y(3) = f(1,3) + f(2,3) + f(3,3) = 0.00 + 0.20 + 0.10 = 0.30$$

$$\text{Οπότε: } f_Y(y) = \begin{cases} 0.20, & y = 1 \\ 0.50, & y = 2 \\ 0.30, & y = 3 \\ 0, & y \notin 1, 2, 3 \end{cases}$$

(β)

$$P(X \geq 2, Y \geq 2) = f(2,2) + f(3,2) + f(2,3) + f(3,3) = 0.10 + 0.20 + 0.35 + 0.10 = 0.75$$

(γ)

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot f_X(x_i) = 1 \cdot f_X(1) + 2 \cdot f_X(2) + 3 \cdot f_X(3) = 0.10 + 2 \cdot 0.35 + 3 \cdot 0.55 = 2.45$$

$$E(Y) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j \cdot f_Y(y_j) = 1 \cdot f_Y(1) + 2 \cdot f_Y(2) + 3 \cdot f_Y(3) = 0.20 + 2 \cdot 0.50 + 3 \cdot 0.30 = 2.1$$

(δ)

Η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της Y για X=2 είναι: $f_{Y|X}(y_j | x=2) = \frac{f_{XY}(2, y_j)}{f_X(2)}$.

$$\text{Οπότε: } f_{Y|X}(y | x=2) = \begin{cases} \frac{0.05}{0.35}, & y=1 \\ \frac{0.10}{0.35}, & y=2 \\ \frac{0.20}{0.35}, & y=3 \\ 0, & y \notin 1,2,3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{7}, & y=1 \\ \frac{2}{7}, & y=2 \\ \frac{4}{7}, & y=3 \\ 0, & y \notin 1,2,3 \end{cases}$$

(ε)

Η δεσμευμένη πιθανότητα θα είναι:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2 | Y = 2) &= f_{X|Y}(x=3 | y=2) + f_{X|Y}(x=2 | y=2) = \frac{f_{XY}(3,2)}{f_Y(2)} + \frac{f_{XY}(2,2)}{f_Y(2)} = \\ &= \frac{35}{50} + \frac{10}{50} = \frac{45}{50} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

(στ)

Έχουμε ήδη υπολογίσει ότι: $E(X) = 2.45$ και $E(Y) = 2.1$.

Είναι:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_j f_{XY}(x_i, y_j) = \sum_{y=1}^3 \sum_{x=1}^3 xy f_{XY}(x, y) = \sum_{y=1}^3 y f_{XY}(1, y) + 2y f_{XY}(2, y) + 3y f_{XY}(3, y) = \\ &= f_{XY}(1,1) + 2f_{XY}(2,1) + 3f_{XY}(3,1) + 2f_{XY}(1,2) + 2 \cdot 2f_{XY}(2,2) + 3 \cdot 2f_{XY}(3,2) + 3f_{XY}(1,3) + 2 \cdot 3f_{XY}(2,3) + \\ &+ 3 \cdot 3f_{XY}(3,3) = 0.05 + 2 \cdot 0.05 + 3 \cdot 0.10 + 2 \cdot 0.05 + 2 \cdot 2 \cdot 0.10 + 3 \cdot 2 \cdot 0.35 + 3 \cdot 0.00 + 2 \cdot 3 \cdot 0.20 + 3 \cdot 3 \cdot 0.10 = \\ &= 0.05 + 0.10 + 0.30 + 0.10 + 0.40 + 2.10 + 0.00 + 1.20 + 0.90 = 5.15 \end{aligned}$$

Άρα, η συνδιασπορά είναι: $C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 5.15 - 2.45 \cdot 2.1 = 0.005$

Άσκηση 6

(α)

Σωστή απάντηση είναι η (ii), δηλαδή το ζεύγος $X, 2X$

$$\text{Πράγματι είναι: } \rho = \frac{C(X, 2X)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(2X)}} = \frac{2C(X, X)}{2\sqrt{V(X)}^2} = \frac{E(X^2) - E(X)^2}{V(X)} = \frac{E(X^2) - E(X)^2}{E(X^2) - E(X)^2} = 1$$

(β)

$$\text{Το ενδεχόμενο (i) έχει πιθανότητα: } \frac{1}{\binom{52}{4}} = \frac{4!48!}{52!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} = \frac{1}{49 \cdot 25 \cdot 17 \cdot 13} = \frac{1}{270725}$$

Το ενδεχόμενο (ii) έχει πιθανότητα:

$$\frac{13^4}{\binom{52}{4}} = \frac{4!48!13^4}{52!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 13^4}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} = \frac{13^4}{49 \cdot 25 \cdot 17 \cdot 13} = \frac{13^4}{270725} = \frac{28561}{270725}$$

Το ενδεχόμενο (iii) έχει πιθανότητα:

$$\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{\binom{52}{4}} = \frac{4!13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{52!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} = \frac{13 \cdot 11 \cdot 5}{49 \cdot 25 \cdot 17 \cdot 13} = \frac{715}{270725}$$

Το ενδεχόμενο (iv) έχει πιθανότητα:

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{\binom{52}{4}} = \frac{4!12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{52!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} = \frac{11 \cdot 5 \cdot 9}{49 \cdot 25 \cdot 17 \cdot 13} = \frac{495}{270725}$$

Άρα τη μικρότερη πιθανότητα έχει το πρώτο ενδεχόμενο, οπότε σωστή είναι η απάντηση (i).

(γ)

Επειδή: $P(A) + P(B) = 1.1 > 1$ συνεπάγεται ότι $P(A \cap B) \neq 0$ άρα $A \cap B \neq \emptyset$. Άρα τα ενδεχόμενα δεν είναι ασυμβίβαστα.

Είναι: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.28 = P(A) \cdot P(B)$ άρα τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.

Άρα τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα αλλά όχι ασυμβίβαστα και σωστή απάντηση είναι η (i).

(δ)

Οι απαντήσεις (i) και (ii) είναι λάθος, γιατί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι αύξουσα.

Η απάντηση (iii) είναι λάθος καθώς αφορά διακριτές μεταβλητές.

Άρα, σωστό είναι το (iv), η γραφική παράσταση είναι δυνατό να αντιστοιχεί σε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

(ε)

Το (ii) είναι προφανώς λάθος αφού $B \cap \Gamma$ είναι το ενδεχόμενο της ταυτόχρονης πραγματοποίησης και του Β και του Γ.

Είναι: $B \cap \Gamma \subseteq B \cup \Gamma$ άρα και το (i) είναι λάθος.

Επειδή $(B \cap \Gamma)' = B' \cup \Gamma'$ το (iii) θα ήταν σωστό μόνο στην ειδική περίπτωση όπου $B \subset \Gamma$ ή $\Gamma \subset B$.

Άρα σωστό είναι το (iv): $A \cap [B' \cap \Gamma \cup B \cap \Gamma']$

Άσκηση 7

(α)

Έστω Α το ενδεχόμενο ο παίκτης να κερδίσει το έπαθλο και A_1, A_2, A_3 τα ενδεχόμενα ο υπολογιστής να μην σβήσει κανένα κουμπί, να σβήσει ένα κουμπί, να σβήσει δύο κουμπιά, αντίστοιχα. Τότε:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + P(A \cap A_3) = \\ &= P(A_1)P(A | A_1) + P(A_2)P(A | A_2) + P(A_3)P(A | A_3) = 0.5 \cdot 0.25 + 0.3 \cdot \frac{1}{3} + 0.2 \cdot 0.5 = 0.325 \end{aligned}$$

(β)

$$P(A \cap A_3) = P(A_3)P(A | A_3) = 0.2 \cdot 0.5 = 0.1$$

(γ)

$$P(A_2 | A) = \frac{P(A_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_2)P(A | A_2)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.325} = \frac{1}{3.25} = 31\%$$

(δ)

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι: $\{ (0, \Sigma), (0, \Lambda), (1, \Sigma), (1, \Lambda), (2, \Sigma), (2, \Lambda) \}$ όπου ο αριθμός αφορά τα κουμπιά που έσβησαν και το Σ, Λ τη σωστή ή λανθασμένη επιλογή κουμπιού που ακολούθως κάνει ο παίκτης.

Άσκηση 8

(α)

Υπάρχουν $15!$ διαφορετικές σειρές άφιξης όσες είναι δηλαδή οι μεταθέσεις των 15 φοιτητών.

(β)

Η πιθανότητα να μπουν οι 5 γυναίκες στην αίθουσα διαδοχικά είναι: $\frac{11 \cdot 5! \cdot 10!}{15!}$ αφού η πεντάδα των γυναικών μπορεί να εισέλθει με 11 τρόπους ως προς τους 10 άνδρες.

(γ)

Αφού ο Γιάννης και η Μαρία περιλαμβάνονται, απομένουν 2 θέσεις για 13 φοιτητές που μπορούμε να τους επιλέξουμε με τόσους τρόπους όσοι είναι οι συνδυασμοί των 13 άνα 2.

$$\text{Οπότε πιθανότητα είναι: } \frac{\binom{13}{2}}{\binom{15}{4}} = \frac{\frac{13!}{2!11!}}{\frac{15!}{4!11!}} = \frac{3 \cdot 4}{15 \cdot 14} = \frac{2}{35}.$$

(δ)

Αφού ο Γιάννης και η Μαρία περιλαμβάνονται, η θέση του άντρα μπορεί να συμπληρωθεί με 9 τρόπους, για κάθε έναν από τους οποίους η θέση της γυναίκας μπορεί να συμπληρωθεί με 4 τρόπους. Οπότε η τετράδα μπορεί να συμπληρωθεί με $9 \cdot 4$ διαφορετικούς τρόπους, άρα η

$$\text{πιθανότητα είναι: } \frac{9 \cdot 4}{\binom{10}{2} \binom{5}{2}} = \frac{36}{\frac{10!}{2!8!} \frac{5!}{2!3!}} = \frac{36}{\frac{9 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 4}{4}} = \frac{2}{25}.$$