

Ο αλγόριθμος του Gauss

Δημήτρης Παναγόπουλος

1 Ορισμοί

Ορισμός 1.1 Οι παρακάτω τρεις μετατροπές σε ένα πίνακα λέγονται γραμμοπράξεις:

- i. Εναλλαγή δύο γραμμών. Συμβολίζεται με $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$.
- ii. Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής με ένα μη μηδενικό αριθμό λ . Συμβολίζεται με $\Gamma_i \leftarrow \lambda \Gamma_i$.
- iii. Πρόσθεση των στοιχείων μιας γραμμής, πολλαπλασιασμένων με έναν αριθμό στα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης. Συμβολίζεται με $\Gamma_i \leftarrow \Gamma_i + \lambda \Gamma_j$.

Ορισμός 1.2 Ένας πίνακας λέγεται κλιμακωτός, αν ισχύουν τα παρακάτω:

- i. οι μη μηδενικές γραμμές του βρίσκονται πάνω από τις μηδενικές,
- ii. το πρώτο από αριστερά μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής είναι το 1 και βρίσκεται δεξιότερα του αντίστοιχου 1 της προηγούμενης.

Αν επιπλέον το πρώτο μη αριστερά 1 κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει, τότε ο πίνακας λέγεται ανοιγμένος κλιμακωτός.

2 Αλγόριθμος του Gauss

Ο αλγόριθμος του Gauss χρησιμοποιείται για να μετατρέψουμε ένα πίνακα σε (ανοιγμένη) κλιμακωτή μορφή.

Αλγόριθμος 2.1 (Ο αλγόριθμος του Gauss)

- βήμα 1. Βρίσκουμε την πρώτη στήλη του πίνακα που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο.
- βήμα 2. Μεταφέρουμε στον πίνακα πρώτη τη γραμμή που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο της στήλης (γραμμοπράξη 1).
- βήμα 3. Κάνουμε το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης μονάδα (γραμμοπράξη 2).
- βήμα 4. Κάνουμε όλα τα στοιχεία της στήλης που είναι κάτω από τη μονάδα μηδενικά (γραμμοπράξη 3).
- βήμα 5. Αγνοούμε την πρώτη γραμμή του πίνακα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα από 1 έως 4, μέχρι οι γραμμές που απομένουν να γίνουν μηδενικές.

βήμα 6. Από γραμμή σε γραμμή χρησιμοποιώντας το πρώτο από αριστερά 1 κάθε γραμμής και τη γραμμοπράξη 3 μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία της στήλης στην οποία βρίσκεται η μονάδα αυτή.

Παρατήρηση 2.2 *Αν εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο μέχρι το βήμα 5, τότε καταλήγουμε σε έναν κλιμακωτό πίνακα. Εφαρμόζοντας και το βήμα 6, καταλήγουμε σε ανοιγμένο κλιμακωτό.*