Ασκήσεις ΠΛΗ12

Άσκηση 1 (άσκηση 1 1ης εργασίας 2011-12)

Α) Εξετάστε αν τα διανύσματα (1,0,2,1), (0,2,1,0), (1,0,0,2) του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Β) Αφού δικαιολογήστε γιατί τα διανύσματα (1,1,1), (2,1,0), (1,1,0) αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$, παραστήστε το (0,1,2) ως γραμμικό συνδυασμό αυτών.

Γ) Εξετάστε ποια από τα σύνολα

$$\{(x,x,y^2)|x,y\in\mathbb{R}\},\{(x,y,1)|x,y\in\mathbb{R}\},\{(x,3y,x-y)|x,y\in\mathbb{R}\}$$

είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$. Σε περίπτωση που κάποιο σύνολο είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, βρείτε μια βάση και τη διάστασή του.

Λύση

Α) Έστω $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ με

$$\lambda_1(1,0,2,1)+\lambda_2(0,2,1,0)+\lambda_3(1,0,0,2)=(0,0,0,0)$$

τότε έχουμε,

$$(\lambda_1+\lambda_3,2\lambda_2,2\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1+2\lambda_3)=(0,0,0,0)$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\ 2\lambda_2=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1+2\lambda_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases}$$

Συνεπώς τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Β) Έστω $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ με

$$\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(2,1,0)+\lambda_3(1,1,0)=(0,0,0)$$

τότε έχουμε,

$$(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases}$$

Συνεπώς τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επειδή είναι τόσα όση και διάσταση του $\mathbb{R}^3$ αποτελούν μια βάση του.

Έστω $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ με

$$\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(2,1,0)+\lambda_3(1,1,0)=(0,1,2)$$

τότε έχουμε,

$$(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1)=(0,1,2)$$

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1\\ \lambda_1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=2\\ \lambda_2=-1\\ \lambda_3=0\end{cases}$$

άρα

$$2(1,1,1)-(2,1,0)+0(1,1,0)=(0,1,2)$$

Γ) Το σύνολο $A_1=\{(x,x,y^2)|x,y\in\mathbb{R}\}$ δεν είναι υπόχωρος γιατί $(0,0,1)\in A_1$ και συνεπώς αν ήταν θα είχαμε $-(0,0,1)=(0,0,-1)\in A_1$ και συνεπώς θα υπήρχε πραγματικός αριθμός y με $y^2=-1$.

Το σύνολο $A_2=\{(x,y,1)|x,y\in\mathbb{R}\}$ δεν είναι υπόχωρος γιατί $0(0,0,1)=(0,0,0)\notin A_2$.

Το σύνολο $A_3=\{(x,3y,x-y)|x,y\in\mathbb{R}\}$ είναι υπόχωρος γιατί είναι μη κενό αφού $(0,0,0)\in A_3$. Επίσης αν $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\in A_3$ τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x_1,y_1,x_2,y_2 ώστε

$$(a_1,a_2,a_3)=(x_1,3y_1,x_1-y_1)$$

και

$$(b_1,b_2,b_3)=(x_2,3y_2,x_2-y_2)$$

Και ισχύει ότι

$$(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(x_1,3y_1,x_1-y_1)+(x_2,3y_2,x_2-y_2)=$$
$$(x_1+\ x_2,3(y_1+y_2),(x_1+x_2)-(y_1+y_2))\in A_3$$

Καθώς και

$$\lambda(a_1,a_2,a_3)=(\lambda x_1,3\lambda y_1,\lambda x_1-\lambda y_1)\in A_3$$

για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Τέλος αν

$$(a\ \ ,a\ \ ,a\ \ )=(x\ \ ,3y\ \ ,x\ \ -y\ \ )\in A_3$$

τότε,

$$(x\ \ ,3y\ \ ,x\ \ -y\ \ )=x(1,0,1)+y(0,3,-1)$$

και συνεπώς τα διανύσματα (1,0,1),(0,3,-1) παράγουν τον υπόχωρο. Επειδή είναι και γραμμικά ανεξάρτητα (αφού το ένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου) αποτελούν μια βάση του A_3.

<u>Άσκηση 2</u> (άσκηση 1 4ης εργασίας 2011-12)

α) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b, \varepsilon\alpha\nu\ x\leq 4\\ \sqrt{x^2+9}, \varepsilon\alpha\nu\ x>4\end{cases}$$

Να προσδιορισθούν τα $a,b\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων

i) $(x)=\frac{x^2-5}{lnx}$, ii) $h(x)=\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^2$, iii) $k(x)=ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

γ) Να υπολογίσετε την δεύτερη παράγωγο *l΄΄*(x) της συνάρτησης $l(x)=x^m\cos(nx)$

όπου *m*, *n* μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί και στην συνέχεια τις τιμές *l΄*(0), *l΄΄*(0), *l΄*(π), *l΄΄*(π).

Λύση

α) Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 4$ (ως πολυωνυμική για $x < 4$ και σύνθεση πολυωνυμικής με την τετραγωνική ρίζα για $x > 4$). Για να είναι παραγωγίσιμη στο 4 πρέπει

- να είναι συνεχής στο 4, άρα πρέπει $\lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$
  συνεπώς $16 + 4\alpha + b = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow 4\alpha + b = -11 \Rightarrow b = -11 - 4\alpha$,
- να ισχύει η ισότητα $\lim_{x\to 4^-} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ και τα όρια να είναι πραγματικοί αριθμοί, άρα

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x^2+\alpha x+b-5}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x-4}$$

επειδή $b = -11 - 4\alpha$ έχουμε,

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x^2+\alpha x-4\alpha-16}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x-4}$$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x^2+\alpha x-4\alpha-16}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x-4}$$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x^2-16+\alpha x-4\alpha}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{(\sqrt{x^2+9}-5)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)}$$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{(x-4)(x+4)+\alpha(x-4)}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{x^2-16}{(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)}$$

$$\lim_{x\to 4^-} (x+4+\alpha) = \lim_{x\to 4^+} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)}$$

$$\lim_{x\to 4^-} (x+4+\alpha) = \lim_{x\to 4^+} \frac{x+4}{(\sqrt{x^2+9}+5)}$$

$$8 + \alpha = 0{,}8$$

$$\alpha = -7{,}2$$

και $b = -11 - 4\alpha = -17{,}8$.

β) i) $g'(x) = \left(\frac{x^2-5}{lnx}\right)' = \frac{(x^2-5)'lnx-(x^2-5)(lnx)'}{\ln^2 x} = \frac{2xlnx-(x^2-5)\frac{1}{x}}{\ln^2 x} =$

$$\frac{2x^2lnx - x^2 + 5}{x\ln^2 x}$$

ii) $h'(x) = \left(\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^2\right)' = 2\frac{1+x}{1+x^2}\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)' = 2\frac{1+x}{1+x^2}\cdot\frac{(1+x)'(1+x^2)-(1+x)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} =$

$$2\frac{1+x}{1+x^2}\cdot\frac{(1+x^2)-(1+x)2x}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1+x}{1+x^2}\cdot\frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$\frac{2(1+x)(1-2x-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

iii) $k'(x) = \left(ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}}\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)' =$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' =$$

$$\frac{1}{2\frac{x^2+1}{x^2-1}}\frac{(x^2+1)'(x^2-1)-(x^2+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$$

$$\frac{1}{2\frac{x^2+1}{x^2-1}}\frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{2\frac{x^2+1}{x^2-1}}\frac{-4x}{(x^2-1)^2} =$$

$$\frac{-2x}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

γ) Είναι $l'(x) = (x^m\cos(nx))' = (x^m)'\cos(nx) - x^m(\cos(nx))' =$

$$mx^{m-1}\cos(nx) - x^m n\sin(nx)$$

- αν $m > 1$

$$l''(x) = (mx^{m-1}\cos(nx) - x^m n\sin(nx))' =$$

$$(mx^{m-1}\cos(nx))' - (x^m n\sin(nx))' =$$

$$m(x^{m-1})'\cos(nx) + mx^{m-1}(\cos(nx))' - n(x^m)'\sin(nx) - nx^m(\sin(nx))' =$$

$$m(m-1)x^{m-2}\cos(nx) - mnx^{m-1}\sin(nx) - nmx^{m-1}\sin(nx) - n^2x^m\cos(nx)$$

$$[m(m-1) - n^2x^2]x^{m-2}\cos(nx) - 2mnx^{m-1}\sin(nx)$$

- αν $m = 1$, τότε $l'(x) = \cos(nx) - xn\sin(nx)$ και συνεπώς
$$l''(x) = -nsin(nx) - nsin(nx) - n^2xcos(nx)$$
$$= -2nsin(nx) - n^2xcos(nx)$$

Άρα $l'(0) = 0$, αν $m > 1$ και $l'(0) = 1$, αν $m = 1$.

Επίσης,

$$l''(0) = 0, \text{ αν } m > 2,$$

$$l''(0) = 2, \text{ αν } m = 2,$$

$$\text{και } l''(0) = 0, \text{ αν } m = 1.$$

Τέλος,

$$l''(\pi) = [m(m-1) - n^2\pi^2]\pi^{m-2}\cos(n\pi), \text{ αν } m > 1,$$

$$\text{άρα } l''(\pi) = \begin{cases} [m(m-1) - n^2\pi^2]\pi^{m-2}, & \text{αν } m > 1, n \text{ άρτιος} \\ -[m(m-1) - n^2\pi^2]\pi^{m-2}, & \text{αν } m > 1, n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\text{και } l''(\pi) = -n^2\pi cos(n\pi), \text{ αν } m = 1.$$

$$\text{άρα } l''(\pi) = \begin{cases} -n^2\pi cos(n\pi), & \text{αν } m = 1, n \text{ άρτιος} \\ n^2\pi cos(n\pi), & \text{αν } m = 1, n \text{ περιττός} \end{cases}$$

<u>Άσκηση 3</u> (άσκηση 3 4ης εργασίας 2010-11)

α) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$, ii) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(bx)}{x^a}$, $a, b > 0$, iii) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(lnx)^2}{x}$,
iv) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin(x)}{2x+\cos(x)}$

β) Εφόσον υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty}(x+1)^{\frac{1}{x}}$, να δείξετε ότι $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$.

Λύση

α)

i) Έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{xln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}=e^{2}$

γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}xln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}}=(De\ l'hospital)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{-\frac{1}{\mathrm{x}^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2}{(x+1)(x-1)}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}2=2$$

ii) Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(bx)}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(bx))'}{(x^{\alpha})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{b}{x}}{ax^{\alpha-1}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{ax^{\alpha}}=0$$

iii) Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\mathrm{lnx})^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{((\mathrm{lnx})^2)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\mathrm{lnx}}{\mathrm{x}}}{1}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\mathrm{lnx}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2\mathrm{lnx})'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\mathrm{x}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$

iv) Για x αρκετά μεγάλο (π.χ. $x>2$) έχουμε

$0<2x-1<2x+cosx<2x+2$ και $0<x-1<x-sinx<x+1$

άρα

$$\frac{x-1}{2x+2}<\frac{x-sinx}{2x+cosx}<\frac{x+1}{2x-1}$$

επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-sinx}{2x+cosx}=\frac{1}{2}$$

β) Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)}=e^0=1$$

γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x+1))'}{(x)'}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\mathrm{x}+1}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

Συνεπώς,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n+1}=\lim_{n\to+\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}=1.$$