Άλγεβρα Ασκήσεις Επανάληψης 1

Δημήτρης Παναγόπουλος

1 Ομάδες

Άσκηση 1.1 *Αν* $\sigma, \tau \in S_5$ *με* $\sigma = (1,2,3)$ *και* $\tau = (4,5)$ *να βρεθούν οι* $\sigma \circ \tau^{-1}$ *και* $\tau^{-1} \circ \sigma$. *Δικαιολογήστε το αποτελέσμα.*

Άσκηση 1.2 *Έστω* $(G, \cdot)$ *ομάδα και* $Z(G) = \{a \in G : ax = xa, \forall x \in G\}$ *(*$Z(G)$ *λέγεται κέντρο της* G*). Να δείξετε ότι το* $Z(G)$ *είναι φορέας υποομάδας (δηλ. υποομάδα) της* G.

Άσκηση 1.3 *Έστω* $(G, \cdot)$ *ομάδα με* $|G| = pq$ *όπου* p, q *είναι πρώτοι. Να αποδειχθεί ότι όλες οι γνήσιες υποομάδες της είναι κυκλικές.*

Άσκηση 1.4 *Έστω ότι η ομάδα* $(K, \cdot)$ *είναι γνήσια υποομάδα της* $(H, \cdot)$ *και η* $(H, \cdot)$ *γνήσια υποομάδα της* $(G, \cdot)$. *Αν* $|K| = 42$ *και* $|G| = 420$, *να βρεθούν οι πιθανές τάξεις της* $(H, \cdot)$.

Άσκηση 1.5 *Έστω* $(G, \cdot)$ *ομάδα και* $a \in G$. *Να δείξετε ότι το σύνολο* $C(a) = \{g \in G : ga = ag\}$ *ειναι φορέας υοποομάδας (δηλ. υποομάδα) της* G.

Άσκηση 1.6 *Έστω* $(G, \cdot)$ *ομάδα και* H, K *υποομάδες της με* $|H| = 12$ *και* $|K| = 35$, *να βρεθεί το* $H \cap K$.

Άσκηση 1.7 *Έστω* $(G, \cdot)$ *ομάδα και* $a, b \in G$. *Αν* $(ab)^2 = a^2b^2$ *να δειχθεί ότι* $ab = ba$.

Άσκηση 1.8 *Έστω* $(G, \cdot)$ *ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το* e *και* $a, b \in G$. *Να δείξετε ότι:*

i. $ord(a) = 1 \Leftrightarrow a = e$

ii. $ord(a) = 5 \Leftrightarrow ord(a^{-1}) = 5$

iii. $ord(a) = 7 \Leftrightarrow ord(bab^{-1}) = 7$.

Άσκηση 1.9 *Έστω* $(G, \cdot), (H, \cdot)$ *ομάδες με ουδέτερα στοιχεία τα* e_G, e_H *αντίστοιχα. Αν* $f : G \to H$ *είναι μορφισμός ομάδων και* $a \in G$, *να δείξετε ότι:*

i. $f(e_G) = e_H$

ii. $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$

iii. $f(a^n) = (f(a))^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

2 Δακτύλιοι - Σώματα

Ένας μεταθετικός δακύτλιος με μονάδα για τον οποίο ισχύει ότι αν $xy = 0$,τότε $x = 0$ ή $y = 0$ λέγεται ακέραια περιοχή.

Άσκηση 2.1 *Απαντήστε με σωστό ή λάθος.*

i. *κάθε δακτύλιος είναι ακέραια περιοχή*

ii. *κάθε ακέραια περιοχή είναι σώμα*

iii. *το σύνολο $\mathbb{R}[x]$ όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές είναι ακέραια περιοχή*

iv. *το σύνολο $\mathbb{R}[x]$ όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές είναι σώμα*

v. *το $\mathbb{Z}_4$ είναι ακέραια περιοχή.*

Άσκηση 2.2 *i.* *Το*

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

είναι σώμα με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

ii. *Να λυθεί η εξίσωση*

$$x^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.3 *Να δώσετε τον ορισμό του δακτυλίου και να δείξετε ότι σε ένα δακτύλιο $a0 = 0$ για κάθε a στοιχείο του δακτυλίου.*

3 Διανυσματικοί χώροι

Άσκηση 3.1 *Αν $u_1 = (0, 1, 0)$, $u_2 = (2, 0, 2)$, $u_3 = (4, 4, 4)$, τότε να δείξετε ότι το $\{u_1, u_2, u_3\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.*

Άσκηση 3.2 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και u_1, u_2, u_3 γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του. Να δείξετε ότι τα $w_1 = u_1 - u_2$, $w_2 = u_2 - u_3$, $w_3 = u_3 + 5u_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

Άσκηση 3.3 *Να εξετάσετε αν τα $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (2, 2, 0)$, $u_3 = (4, 4, 4)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.*

Άσκηση 3.4 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{R}$ και μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$. Αν $Imf = \{w \in W :$ υπάρχει $u \in V$ ώστε $f(u) = w\}$ και $kerf = \{u \in V : f(u) = 0\}$ τότε να δείξετε ότι το Imf είναι υπόχωρος του W και το $kerf$ υπόχωρος του V.*

Άσκηση 3.5 *Έστω* $W_1 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}, x + y + z = 0\}$ *και* $W_2 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}, x + y - z = 0\}$. *Να δείξετε ότι τα* W_1, W_2 *είναι διανυσματικοί υπόχωροι του* $\mathbb{R}^3$. *Να βρεθεί το* $W_1 \cap W_2$ *και να δειχθεί ότι είναι υπόχωρος. Να βρεθούν βάσεις για τα* W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ *καθώς και οι διαστάσεις τους.*

Άσκηση 3.6 *Αν* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *και*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας της f *ως προς τις βάσεις* $\{(1, 0), (1, 2)\}$ *και* $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$, *τότε να βρεθεί ο τύπος της* f.