Ανάλυση Ασκήσεις Επανάληψης 1

Δημήτρης Παναγόπουλος

1 Ακολουθίες σειρές

Άσκηση 1.1 *Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών* $a_n = \frac{1+2^k+...+n^k}{n^k+1}$, $b_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$, $c_n = \sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}$.

Άσκηση 1.2 *Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών* $a_n = \frac{2^n+n}{3^n-n}$, $b_n = \frac{3^{n+1}-2^n}{5^n}$.

Άσκηση 1.3 *Να υπολογιστεί η σειρά* $\sum_{n=1}^{=\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Άσκηση 1.4 *Να βρεθεί αν συγκλίνουν ή όχι οι σειρές:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+1}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}, \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{3n+5}\right)^n.$$

Άσκηση 1.5 *Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, *αν:*

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{n^2+5n+3}{3n^2+4n+1}\right)^n, \text{ αν } n \text{ περιττός} \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^2, \text{ αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Άσκηση 1.6 *Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+5}{n!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

(Υπόδειξη. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$*.)*

2 Συναρτήσεις - Ολοκληρώματα

Άσκηση 2.1 *Να μελετηθεί η* $y = e^{-x^2}$.

(Πεδίο ορισμού, εξέταση συμμετρίας, προσδιορισμός ασυμπτώτων, συνέχεια, μονοτονία, τοπικά ακρότατα, καμπυλότητα, σημεία καμπής, σύνολο τιμών.)

Άσκηση 2.2 *Να υπολογιστούν τα όρια:* $\lim_{x\to 0} \frac{sin^x}{(1-cos(3x))^2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2}$.

Άσκηση 2.3 *Να βρεθεί η* $\frac{dy}{dx}$ *αν* $x = cost$ *και* $y = sint$.

(Υπόδειξη. $\frac{d}{dt}\arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$*.)*

Άσκηση 2.4 *Αν* $f|[0,7]$ *με* $f(0) = 7$, $f(4) = 11$, $f(7) = 14$. *Αν η* f *είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο* $[0,7]$ *να δείξετε ότι υπάρχει* $\xi \in (0,7)$ *με* $f''(\xi) = 0$.

(Υπόδειξη. **(Θεώρημα μέσης τιμής διαφορικού λογισμού)** *Αν η* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη στο* (a,b), *τότε υπάρχει* $\xi in(a,b)$ *ώστε* $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$*.)*

Άσκηση 2.5 *Να υπολογιστεί το:*

$$\int_0^{+\infty}(x^2+3x+2)e^{-2x}dx = \lim_{k\to+\infty}\int_0^k (x^2+3x+2)e^{-2x}dx.$$

Άσκηση 2.6 *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα* $\int x^2 sin(x^3)dx$, $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$.

Άσκηση 2.7 *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα* $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx$.

Άσκηση 2.8 *Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον οριζόντιο άξονα, τις ευθείες* $x=-1$, $x=2$ *και τη γραφική παράσταση της*

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+3,\ x<1 \\ 2\sqrt{x},\ x\geq 1\end{cases}$$

Άσκηση 2.9 *Αν* $f(x)=3x^2$ *τότε να βρεθεί ε εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της* f *στο σημείο* $A(1,3)$ *καθώς και το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της* f, *την εφαπτομένη της στο* A *και τον οριζόντιο άξονα.*

Άσκηση 2.10 *Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον οριζόντιο άξονα του χωρίου που περικλείεται από τον οριζόντιο άξονα, την γραφική παράσταση της* $f(x)=\sqrt{x}$ *και την ευθεία* $x=4$.

3 Διαφορικές Εξισώσεις

Άσκηση 3.1 *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση* $y^2y'-4x=0$.

Άσκηση 3.2 *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση* $\frac{x}{y}y'=3$ *αν* $x>0$ *και* $y(1)=2$.

Μια συνάρτηση $f(x,y)$ λέγεται ομογενής (βαθμού k) αν $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$. Για παράδειγμα η $f(x,y)=x^2y+y^3$ είναι ομογενής βαθμού 3 αφού $f(tx,ty)=(tx)^2ty+(ty)^3=t^3(x^2y+y^3)=t^3f(x,y)$.

Αν έχουμε μια διαφορική εξίσωση $Ax,y)dx+B(x,y)dy=0$ όπου οι $A(x,y)$ $B(x,y)$ είναι ομογενής τότε θέτουμε $y=ux$ (δηλ. $y(x)=xu(x)$). Τότε $dy=udx+xdu$.

Για παράδειγμα αν έχουμε τη διαφορική εξίσωση $x^2ydx+(y^3+x^3)dy=0$ τότε $A(x,y)=x^2y$, $B(x,y)=x^3+y^3$ ομογενείς βαθμού 3 αφού $A(tx,ty)=t^3A(x,y)$, $B(tx,ty)=t^3B(x,y)4$.

Θέτουμε $y=xu$ και συνεπώς $dy=udx+xdu$. Άρα η εξίσωση γράφεται:

$$x^3udx+(x^3u^3+x^3)(udx+xdu)=0$$

$$(2u+u^4)dx+x(u^3+1)du=0$$

$$\frac{u^3+1}{2u+u^4}du=-\frac{1}{x}dx$$

συνεπώς ολοκληρώνουμε και έχουμε:

$$\int\frac{u^3+1}{2u+u^4}du=-\int\frac{1}{x}dx$$

Έτσι βρίσκουμε τη συνάρτηση $u(x)$ και μετά βρίσκουμε τη $y(x)$.

Άσκηση 3.3 *Να λυθούν οι εξισώσεις* $(x^2-2y^2)dx+xydy=0$, $y'=\frac{x^3+y^3}{xy^2}$.

4 Γενικές ασκήσεις

Άσκηση 4.1 i. *Αν η* $f|[a,b]$ *είναι συνεχής να δειχθεί ότι η* $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $[a,b]$ *με* $F'(x)=f(x)$.

ii. *Να υπολογιστούν τα όρια* $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(t-sint)dt}{x^4}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{2t}\sqrt{4t^2+1}dt}{xe^{2x}}$.

Άσκηση 4.2 i. *Να αναλυθεί σε απλά κλάσματα η συνάρτηση* $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

ii. *Να βρεθεί το άθροισμα της σειράς* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

iii. *να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα* $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$.

Άσκηση 4.3 *Να δειχθεί ότι* $ln\sqrt{x}\le x-\sqrt{x}$ *για κάθε* $x\ge 1$. *(Υπόδειξη: ορίστε κατάλληλη συνάρτηση και βρείτε τα ακρότατά της.) Στη συνέχεια να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{ln\sqrt{n}}{\sqrt{n^5}}$.

5 Ανάπτυγμα Taylor

Αν f είναι μια απείρως παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης κέντρου x_0 είναι το:

$$f(x_0)+\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\dots$$

'Οπου $f^{(n)}$ είναι n-οστη παράγωγος της f. Το ανάπτυγμα μέχρι και το βαθμό n λέγεται πολυώνυμο Taylor βαθμού n της f. Ισχύει ότι

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\dots$$

Δηλαδή η συνάρτηση προσεγγίζεται από το ανάπτυγμα Taylor της. Αν x_0 τότε έχουμε ότι το ανάπτυγμα είναι ίσο με

$$f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\dots$$

και λέγεται σειρά Maclaurent της f. Αν σταματήσουμε στον πρωτοβάθμιο όρο τότε λέμε ότι έχουμε τη γραμμικοποίηση της f στο σημείο x_0.

Για παράδειγμα αν $f(x)=e^x$ και $x_0=0$, τότε: $f^{(n)}(x)=e^x$ και συνεπώς $f^{(n)}(0)=1$, άρα το ανάπτυγμα Taylor είναι:

$$e^x=f(x_0)+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{3}{3!}x^3+\dots$$

Άσκηση 5.1 *Να βρεθεί το ανάπτυγμα Taylor της* $f(x)=cosx$ *στο* $x_0=0$.

Άσκηση 5.2 *Να βρεθεί το ανάπτυγμα Taylor της* $f(x)=sinx$ *στο* $x_0=0$.

Άσκηση 5.3 *Να βρεθεί το ανάπτυγμα Taylor της* $f(x)=xe^x$ *στο* $x_0=0$.

Άσκηση 5.4 *Να βρεθεί γραμμικοποίηση της* $f(x)=\sqrt{x+1}+sinx$ *στο* $x_0=0$.