ΕΠΙΛΟΓΗ ΛΥΜΕΝΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΒΑΣΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

e-pitixia

στην -κπαίδευση

Ένα μικρό δείγμα. Για περισσότερα επικοινωνείστε μαζί μας.
Διαθέτουμε μια μεγάλη ποικιλία λυμένων ασκήσεων και θεμάτων.

1 Πολυώνυμα

Άσκηση 1.1 *(Θέμα 1 Ιανουάριος 2013)*

1. *Έστω* $g(x), h(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $g(x) = x^2 - x - 1$, $h(x) = x^3 - x - 1$. *Να βρεθεί ο* $\mu\kappa\delta(g(x), h(x))$ *και πολυώνυμα* $a(x), b(x) \in \mathbb{Q}[x]$, *τέτοια ώστε* $\mu\kappa\delta(g(x), h(x)) = a(x)g(x) + b(x)h(x)$.

2. *Έστω* F *ένα σώμα και* $f(x), g(x), h(x) \in F[x]$ *με* $f(x)$ *μη μηδενικό και* $\mu\kappa\delta(f(x), h(x)) = 1$. *Δείξτε ότι* $\mu\kappa\delta(f(x), g(x)h(x)) =\mu\kappa\delta(f(x), h(x))$.

3. *Δείξτε ότι για κάθε πρώτο* p *και κάθε* $a \in \mathbb{Z}_p$, *το πολυώνυμο* $x^p - a \in \mathbb{Z}_p[x]$ *δεν είναι ανάγωγο.*

Λύση 1.1 1. *Κάνοντας τις διαιρέσεις πολυωνύμων έχουμε:* $x^3 - x - 1 = (x + 1)(x^2 - x - 1) + x \Rightarrow x = (x^3 - x - 1) - (x + 1)(x^2 - x - 1)$
$x^2 - x - 1 = x(x - 1) - 1 \Rightarrow 1 = x(x - 1) - (x^2 - x - 1)$
άρα ο μκδ των πολυωνύμων είναι το 1 και για τα $a(x), b(x)$ *έχουμε*

$$\begin{aligned} 1 &= (x - 1)x - (x^2 - x - 1) \\ &= (x - 1)[(x^3 - x - 1) - (x + 1)(x^2 - x - 1)] - (x^2 - x - 1) \\ &= (x - 2)(x^3 - x - 1) - (x^2 -)(x^2 - x - 1) \end{aligned}$$

2. *Έστω* $d(x) = \mu\kappa\delta(f(x), h(x))$ *και* $d_1(x) = \mu\kappa\delta(f(x), g(x)h(x))$. *Τότε το* $d(x)$ *διαιρεί τα* $f(x), h(x)$ *άρα διαιρεί και τα* $f(x), g(x)h(x)$. *Συνεπώς το* $d(x)$ *διαιρεί το* $d_1(x)$.

   Αν $p(x) \neq 1$ *είναι ένα ανάγωγο που διαιρεί το* $d_1(x)$, *τότε:*

   $$p(x)|d_1(x) \Rightarrow p(x)|(g(x)h(x)) \Rightarrow p(x)|g(x)p(x)|h(x),$$

   η τελευταία συνεπαγωγή επειδή το p(x) είναι ανάγωγο πολυώνυμο. Επίσης,

   $$p(x)|d_1(x) \Rightarrow p(x)|f(x).$$

   Αν $p(x)|h(x)$, *τότε επειδή* $\mu\kappa\delta(f(x), h(x)) = 1$ *έπεται ότι* $p(x) = 1$. *Ατοπο. Αν* $p(x)|h(x)$, *τότε επειδή* $p(x)|f(x)$ *έπεται ότι* $p(x)|d(x)$. *Άρα κάθε ανάγωγος παράγοντας του* $d_1(x)$ *διαιρεί το* $d(x)$ *συνεπάγεται ότι* $d_1(x)|d(x)$

   Τελικά, οι $d_1(x)|d(x)$ *και* $d(x)|d_1(x)$ *σε συνδυασμό με το ότι οι μέγιστοι κοινοί διαιρέτες είναι μονικά πολυώνυμα μας δίνουν ότι* $d_1(x) = d(x)$.

3. *Σύμφωνα με το Θ. Euler*

$$a^p = a \mod p$$

για κάθε $a \in \mathbb{Z}$. *Συνεπώς το πολυώνυμο* $x^p - a \in \mathbb{Z}_p[x]$ *έχει ρίζα στο* $\mathbb{Z}_p$ *και έτσι δεν είναι ανάγωγο.*

2 Δακτύλιοι

Άσκηση 2.1 *(Θέμα 2 Ιανουάριος 2013) Θεωρούμε τους δακτυλίους* $R = \frac{\mathbb{Z}_5[x]}{<x^2+2>}$ *και* $S = \frac{\mathbb{Z}_5[x]}{<x^2+1>}$, *όπου με* $< f(x) >$ *συμβολίζουμε το κύριο ιδεώδες του* $\mathbb{Z}_5[x]$ *που παράγεται από το* $f(x)$, $f(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$.

1. *Δείξτε ότι ο* R *είναι σώμα και ότι ο* S *δεν είναι ακέραια περιοχή.*
2. *Αληθεύει ότι οι δακτύλιοι* R *και* $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ *είναι ισόμορφοι; Αληθεύει ότι οι δακτύλιοι* S *και* $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ *είναι ισόμορφοι;*
3. *Πόσα στοιχεία έχει ο* R*; Πόσα στοιχεία του* S *είναι αντιστρέψιμα;*

Λύση 2.1 1. *Έστω ότι* $f(x) = x^2 + 2$. *Έχουμε στο* $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2 + 2 = 2 \\ f(1) &= 1^2 + 2 = 3 \\ f(2) &= 2^2 + 2 = 6 = 1 \\ f(3) &= 3^2 + 2 = 11 = 1 \\ f(4) &= 4^2 + 2 = 18 = 3 \end{aligned}$$

Δηλαδή το πολυώνυμο $f(x) = x^2 + 2$ *δεν έχει ρίζα στο* $\mathbb{Z}_5$. *Εφ' όσον είναι δευτέρου βαθμού και δεν έχει ρίζα είναι ανάγωγο. Συνεπώς ο δακτύλιος πηλίκο* $R = \frac{\mathbb{Z}_5[x]}{<x^2+2>}$ *είναι σώμα...*

2. ...
3. ... *(Για περισσότερα επικοινωνείστε μαζί μας.)*

3 Ομάδες

Άσκηση 3.1 *(Θέμα 3 Ιανουάριος 2013) Θεωρούμε την ομάδα* $G = \mathbb{Z}_8$ *και την κυκλική υποομάδα* $H = \langle [4] \rangle$ *της* G *που παράγεται από το* $[4] \in \mathbb{Z}_8$.

1. *Βρείτε όλες τις αριστερές κλάσεις της H στη G.*

2. *Βρείτε όλες τις υποομάδες της G.*

3. *Αληθεύει ότι οι ομάδες $\frac{G}{H}$ και $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ είναι ισόμορφες;Αληθεύει ότι οι ομάδες $\frac{G}{H}$ και $\mathbb{Z}_4$ είναι ισόμορφες;*

4. *Βρείτε όλα τα στοιχεία $\alpha \in G$ τέτοια ώστε $G =< \alpha >$.*

Λύση 3.1

1. *Είναι $H = \{n[4] : n \in \mathbb{Z}\} = \{[0], [4]\}$ άρα $|G : H| = \frac{|G|}{|H|} = 4$. Επιπλέον, οι αριστερές κλάσεις είναι οι*
   - $H = [4] + H$,
   - $[1] + H = \{[1], [5]\} = [5] + H$,
   - $[2] + H = \{[2], [6]\} = [6] + H$,
   - $[3] + H = \{[3], [7]\} = [7] + H$.

2. *Επειδή η ομάδα G είναι κυκλική τάξης 8 οι υποομάδες της είναι της μορφής $\langle n[1] \rangle$, όπου n φυσικός αριθμός. Δύο τέτοιες υποομάδες $\langle n_1[1] \rangle$ $\langle n_2[1] \rangle$ είναι ίσες αν και μόνο αν τα στοιχεία $n_1[1]$ και $n_2[1]$ έχουν την ίδια τάξη. Ή ισοδύναμα $\frac{8}{\mu.\varkappa.\delta.(8,n_1)} = \frac{8}{\mu.\varkappa.\delta.(8,n_2)}$Συνεπώς οι υποομάδες της G είναι οι:*
   - $\mu.\varkappa.\delta(8, n) = 1 : G = \langle [1] \rangle$,
   - $\mu.\varkappa.\delta(8, n) = 2 : \langle 2[1] \rangle = \{[0], [2], [4], [6]\}$,
   - $\mu.\varkappa.\delta(8, n) = 4 : \langle 4[1] \rangle = \{[0], [4]\} = H$,
   - $\mu.\varkappa.\delta(8, n) = 8 : \langle 8[1] \rangle = \{[0]\}$.

3. *...*

4. *... (Για περισσότερα επικοινωνείστε μαζί μας.)*