ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ.

Δημήτρης Παναγόπουλος

1 Βασικές ιδιότητες - συναρτήσεις - τοπολογία

1.1 Εισαγωγή στους μιγαδικούς

Άσκηση 1.1. Να γραφούν στη μορφή $a + bi$ με $a, b \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί:

i. $(3 + 3i) + (4 + i)$,

ii. $\frac{2+3i}{4+i}$,

iii. $(2 + 3i)(4 + i)$,

iv. $(2 + i)^2$

Άσκηση 1.2. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $z^2 = 3 - 4i$,

ii. $z^3 - 1 = 0$,

iii. $(z + 1)^2 = 3 - 4i$

Άσκηση 1.3. Δείξτε ότι για τα $z, w \neq 0 \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2\kappa\pi$ και $\arg(\frac{z}{w}) = \arg(z) - \arg(w) + 2\kappa\pi$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 1.4. Να δείξετε ότι αν το $z \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές, τότε και το $\overline{z}$ είναι ρίζα του.

Άσκηση 1.5. Αν $|z| =\leq 1$, να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $|z^2 + i|$.

Άσκηση 1.6. Αν το $z \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, τότε να δειχθεί ότι $|z| < 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_0|$.

1.2 Βασικές μιγαδικές συναρτήσεις

Άσκηση 1.7. Να γραφούν στη μορφή $a + bi$ με $a, b \in \mathbb{R}$οι αριθμοί:

i. e^{2-5i},

ii. $cos(1 - i)$,

iii. $e^{e^{1+i}}$,

iv. $log(-i)$,

v. $log(1+i)$

Άσκηση 1.8. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $sinz = \frac{3}{4} + i$,

ii. $cosz = 4$

Άσκηση 1.9. Για ποιές τιμές του μιγαδικού αριθμού z ισχύει: $\overline{e^{iz}} = e^{i\overline{z}}$;

Άσκηση 1.10. Να εξεταστεί η συμπεριφορά της παράστασης e^{x+iy} καθώς $x \to \pm\infty$ και $y \to \pm\infty$.

Άσκηση 1.11. Να δειχθεί ότι για κάθε μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύει:

i. $cos^2 z + sin^2 z = 1$,

ii. $sin(-z) = -sinz$,

iii. $cos(-z) = cosz$,

iv. $sin(z + 2\pi) = sinz$,

v. $cos(z + 2\pi) = cosz$,

vi. $sin(z + w) = cosz \cdot sinw + sinz \cdot cosw$,

vii. $cos(z + w) = cosz \cdot cosw + sinz \cdot sinw$

Άσκηση 1.12. Έστω $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, $f(\Delta(0, \varepsilon) \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Υπόδειξη: λύστε την εξίσωση $e^{\frac{1}{z}} = w$.)

Άσκηση 1.13. Δείξτε ότι αν το μιγαδικό αριθμό $z |cosz + isinz| = 1$, τότε $z \in \mathbb{R}$. (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τη σχέση του Euler $e^z = cosz + isinz$.)

1.3 Τοπολογία του $\mathbb{C}$ - ακολουθίες - σειρές

Άσκηση 1.14. Να δειχθεί ότι το άνω ημιεπίπεδο $\{z \in \mathbb{C} : Imz > 0\}$ είναι ανοικτό σύνολο.

Άσκηση 1.15. Να εξετάσετε που είναι συνεχής η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{z^{-1} - 1}$.

Άσκηση 1.16. Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής και $f(z_0) = 0$ για κάποιο $z_0 \in \mathbb{C}$, τότε υπάρχει περιοχή του z_0 στην οποία η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται.

Άσκηση 1.17. Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim_{n \to +\infty} \frac{n-i}{n+1}$,

ii. $\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n}) e^{i\frac{\pi}{n}}$,

iii. $\lim_{n \to +\infty} \arg\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$

Άσκηση 1.18. Να εξεταστεί αν συγκλίνουν οι σειρές:

i. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$

ii. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n}$

iii. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n\sqrt{n}}$

(Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την ισότητα $e^{in} = cosn + isinn$)

2 Παράγωγος μιγαδικών συναρτήσεων

2.1 Ορισμός μιγαδικής παραγώγου - σύμορφες απεικονίσεις

Άσκηση 2.1. Να προσδιορίσετε τα σύνολα στα οποία είναι οι παρακάτω συναρτήσεις ολόμορφες και να βρεθούν οι παράγωγοι τους.

i. $f(z) = (z+1)^3$,

ii. $f(z) = z^2 + \frac{1}{z}$,

iii. $f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$,

iv. $f(z) = \frac{z-1}{z^3 - iz^2 - z + i}$

Άσκηση 2.2. Να μελετηθεί η συμπεριφορά των παρακάτω συναρτήσεων τοπικά στα αντίστοιχα σημεία z_0.

i. $f(z) = z + 3$, $Z_0 = 2 + i$,

ii. $f(z) = z^2 - i$, $z_0 = 0$,

iii. $f(z) = \frac{z^2+z+1}{z-1}$, $z_0 = 0$,

iv. $f(z) = \frac{1}{z-1}$, $z_0 = i$

2.2 Εξισώσεις Cauchy - Riemann

Άσκηση 2.3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(z) = z^2 + 1$ ικανοποιεί τις συνθήκες Cauchy - Riemann σε όλο το μιγαδικό επίπεδο.

Άσκηση 2.4. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(z) = \overline{z}$ δεν είναι αναλυτική.

Άσκηση 2.5. Να εξετάσετε αν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{C}$ $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ με $u(x,y) = e^{-x}(xsiny - ycosy)$ και $v(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy$.

Άσκηση 2.6. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη επί του δίσκου $|z| < 1$, και ότι $Ref = 3$ για όλα τα z στο δίσκο αυτό. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή επί του δίσκου αυτού.

Άσκηση 2.7. Να αποδειχθεί ότι αν η μιγαδική συνάρτηση f είναι ολόμορφη σε ένα ανοικτό, συνεκτικό σύνολο A και ισχύει $Imf = 0$, τότε είναι σταθερή στο A. Ισχύει το θεώρημα αν το σύνολο δεν είναι συνεκτικό;

Άσκηση 2.8. Να δειχθεί ότι αν η f είναι ολόμορφη σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, τότε και η g με $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ είναι αναλυτική.

Άσκηση 2.9. Να αποδειχθεί ότι αν η μιγαδική συνάρτηση f είναι ολόμορφη σε ένα ανοικτό, συνεκτικό σύνολο A και ισχύει $|f(z)|$ για κάθε $z \in A$, τότε είναι σταθερή στο A.

Άσκηση 2.10. Έστω $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$.

i. Να βρεθεί σε ποιο σύνολο είναι ολόμορφη.

ii. Είναι σύμορφη η συνάρτηση στο $z = 0$;

iii. Ποιες είναι οι εικόνες των αξόνων x'x και y'y μέσω της f;

iv. Ποια είναι η γωνία τομής των παραπάνω εικόνων;

Άσκηση 2.11. Να βρεθεί η ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση f αν γνωρίζουμε ότι $Ref(x + iy) = 3e^x cosy$ και $f(0) = 3$.

2.3 Αρμονικές συναρτήσεις

Άσκηση 2.12. Να βρεθεί σε ποια σύνολα είναι οι παρακάτω συναρτήσεις αρμονικές.

i. $u(x, y) = Re\frac{x+iy}{(x+iy)^3-1}$,

ii. $u(x, y) = Im\left(x + iy + \frac{1}{x+iy}\right)$,

iii. $u(x, y) = \frac{y}{(x-1)^2+y^2}$

Άσκηση 2.13. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $u(x, y) = e^x cosy$ είναι αρμονική στο $\mathbb{C}$. Να βρεθεί μια συζυγής αρμονική της u.

Άσκηση 2.14. Όμοια για την $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

3 Μιγαδικά ολοκληρώματα I

3.1 Ορισμός - κλασικά θεωρήματα

Άσκηση 3.1.

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα με τη χρήση του ορισμού

i. $\int_\gamma Rezdz$ όπου γ είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το 0 στο $1 + i$,

ii. $\int_\gamma z^2dz$ όπου γ είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το 0 στο $1 + i$,

iii. $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$ όπου γ είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου 0 με θετική φορά,

iv. $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$ όπου γ είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου 2 με θετική φορά,

v. $\int_\gamma Rezdz$ όπου γ είναι η περίμετρος του τετραγώνου $[0,1]\times[0,1]$,

vi. $\int_\gamma e^z dz$ όπου γ είναι το πάνω ημικύκλιο του μοναδιαίου κύκλου κέντρου0 από το -1 στο 1.

Άσκηση 3.2. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $\gamma(t) = cost + isint$, $t \in [0, 2\pi]$.

Άσκηση 3.3. Να δείξετε ότι

$$\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz\right| \leq \pi e$$

όπου γ είναι το πάνω ημικύκλιο του μοναδιαίου κύκλου κέντρου 0 από το -1 στο 1.

Άσκηση 3.4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$ όταν η καμπύλη γ είναι:

i. ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου 0 με θετική φορά,

ii. μια κλειστή καμπύλη που δεν τέμνεται από τον αρνητικό ημιάξονα των πραγματικών αριθμών.

Γιατί στην πρώτη περίπτωση το αποτέλεσμα δεν είναι μηδέν; Εφαρμόζεται το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού για τα επικαμπύλια ολοκληρώματα; Γιατί όχι;

Άσκηση 3.5. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση f σε όλο το $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ με $f'(z) = \frac{1}{z}$. (Υπόδειξη χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.)

Άσκηση 3.6. Έστω γ ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου 0 με θετική φορά. Να υπολογιστεί για τις διάφορες τιμές του φυσικού αριθμού ν το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{1}{z^\nu}dz$.

3.2 Θεώρημα Cauchy - ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy

Άσκηση 3.7. Να δείξετε ότι το σύνολο $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 4\}$ δεν είναι απλά συνεκτικό.

Άσκηση 3.8. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int_\gamma \frac{z^2}{z-1}dz$, όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας 2,

ii. $\int_\gamma \frac{sinz}{z^2}dz$, όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας 1,

iii. $\int_\gamma \frac{z^2-1}{z+1}dz$, όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας 2,

iv. $\int_\gamma \frac{cose^z}{z}dz$,όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας 1.

Άσκηση 3.9. Έστω $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ οι κύκλοι θετικής φοράς, κέντρων 0,-1,1 και ακτίνων 2,1,1 αντίστοιχα. Αν η f είναι μια ολόμορφη συνάρτηση σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός των σημείων -1 και 1, τότε να δειχτεί ότι:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Άσκηση 3.10. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int_\gamma \frac{z^2}{z^2+1}dz$, όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας 2,

ii. $\int_\gamma \frac{sinz}{z^2-1}dz$, όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας 2,

iii. $\int_\gamma \frac{1}{z^2+z+1}dz$, όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας 2,

iv. $\int_\gamma \frac{1}{z^2-8}dz$,όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας 2.

Άσκηση 3.11. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_\gamma \frac{z^2}{(z+1)^2}dz$, όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας 2,

ii. $\int_\gamma \frac{sinz}{(z+1)^3}dz$, όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας 2,

iii. $\int_\gamma \frac{1}{(z^2+z+1)^2}dz$, όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας 2.

Άσκηση 3.12. Έστω ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $C = \{z \in \mathbb{C} : |Z| = 2\}$ και η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \setminus C \longrightarrow \mathbb{C}$ με τύπο

$$f(z) = \int_C \frac{e^{\frac{\pi}{2}\zeta}}{\zeta - z}d\zeta.$$

Να υπολογιστούν οι τιμές $f(i)$, $f(-i)$, $f(z)$ για $|z| > 2$.

Άσκηση 3.13. Έστω f μια ολόμορφη συνάρτηση σε ένα απλά συνεκτικό πεδίο D, C μια απλή, κλειστή, κατά τμήματα λεία, θετικά προσανατολισμένη καμπύλη που περιέχεται στο D και $z_0 \in D$ ένα σημείο στο εσωτερικό της C.

i. Να αποδείξετε το θεώρημα του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy.

ii. Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει:

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz\right)^n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(f(z))^n}{z-z_0}dz.$$

iii. Αν το z_0 βρίσκεται στο εξωτερικό της C να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$.

Άσκηση 3.14. Να υπολογιστεί το $\int_\gamma sin^2 z dz$, όπου γ είναι η καμπύλη με $\gamma(t) = t + icost$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Άσκηση 3.15. Να υπολογιστεί το $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$, όπου γ είναι η καμπύλη με $\gamma(t) = cost + isint$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Άσκηση 3.16. Έστω $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, ολόμορφη συνάρτηση. Για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $R > 0$ με $R \neq |z_1|, |z_2|$, θέτουμε $I(R, z_1, z_2) = \int_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz$ όπου C είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος κέντρου 0 και ακτίνας R. Δείξτε ότι:

i. $|I(R, z_1, z_2)| \leq 2\pi R \frac{max\{|f(z)|: z\in C\}}{|R-|z_1|||R-|z_2||}$,

ii. αν $R > max\{|z_1|, |z_2|\}$, τότε $I(R, z_1, z_2) = 2\pi i \frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}$.

3.3 Ανισότητες Cauchy- αρχή μεγίστου - θεώρημα Liouville

Άσκηση 3.17. Να βρεθούν τα μέγιστα των παρακάτω παραστάσεων στα αναφερόμενα σύνολα:

i. $|e^z|$ στον κυκλικό δίσκο $|z| < 1$,

ii. $|sinz|$ στο τετράγωνο $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$,

iii. $|\frac{1}{z}|$ στο $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1\}$.

Άσκηση 3.18. Έστω $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ μια ολόμορφη συνάρτηση επί ενός ανοικτού συνόλου $A \subset \mathbb{C}$. Αν $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in A$, τότε να δείξετε ότι δεν υπάρχει $z_0 \in A$ ώστε $|f(z_0)| < |f(z)|$ για κάθε $z \in A$, $z \neq z_0$.

Άσκηση 3.19. Έστω f, g δύο ακέραιες συναρτήσεις ώστε $|f(z)| < |g(z)|$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Να δείξετε ότι $f(0)g(z) = f(z)g(0)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. (Υπόδειξη: δείξτε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι σταθερή.)

Άσκηση 3.20. Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ έχουμε γνωρίζουμε ότι είναι αναλυτική στο $|z| < 1$ και $|f'(z)| \leq 1$, τότε να εκτιμηθεί η $|f'(0)|$.

Άσκηση 3.21. Αν για την ακέραια συνάρτηση f ισχύει ότι $lim_{z\to+\infty}\frac{f(z)}{z} = 0$, τότε να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Άσκηση 3.22. Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες επί του κλειστού δίσκου $|z| \leq 1$. Αν $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $z = 1$, τότε να δείξετε ότι $f(z) = g(z)$ για $|z| \leq 1$.

Άσκηση 3.23. Έστω f μια ακέραια συνάρτηση. Αν η f δεν παίρνει τιμές στο σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ για $a \in \mathbb{C}$ και $r > 0$, τότε να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Άσκηση 3.24. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{C}$. Αν η f' είναι φραγμένη, τότε να δείξετε ότι υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί a, b ώστε $f(z) = az+b$.

4 Αναπαράσταση με δυναμοσειρές

4.1 Ομοιόμορφη σύγκλιση - (δυναμο)σειρές

Άσκηση 4.1. Να δειχτεί ότι η ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων $f(x) = sin\left(\frac{x}{n}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $f(x) = 0$, για $x \in [0, \pi]$.

Άσκηση 4.2. Έστω η ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων $f(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι:

i. η ακολουθία συναρτήσεων f_n συγκλίνει κατά σημείο στη

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{αν } 0 \leq x < 1, \\ 1 & , \text{αν } x = 0, \end{cases}$$

ii. η f_n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η τελευταία είναι ασυνεχής,

iii. $sup\{|f(x) - f_n(x)| : x \in [0,1]\} \not\to 0$ καθώς $n \longrightarrow +\infty$.

Άσκηση 4.3. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ συγκλίνει για $|z| < 1$ στη $\frac{1}{1-z}$. Δείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη και απόλυτη σε κάθε κλειστό δίσκο $|z| \leq r < 1$.

Άσκηση 4.4. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}$ συγκλίνει για $|z| < 1$ στη $\frac{1}{(1-z)^2}$. Δείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη και απόλυτη σε κάθε κλειστό δίσκο $|z| \leq r < 1$.

Άσκηση 4.5. Να δείξετε ότι η $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ είναι αναλυτική επί του $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Να βρεθεί το ανάπτυγμα της f'.

Άσκηση 4.6. Να δειχτεί ότι η σειρά $\sum_{n=-1}^{+\infty} z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο $A = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| < 1\}$ και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \left(\sum_{n=-1}^{+\infty} z^n\right) dz$ όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας μικρότερης το 1.

Άσκηση 4.7. Δείξτε ότι

i. η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n}$ συγκλίνει σε μια ολόμορφη συνάρτηση επί του συνόλου $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,

ii. η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!z^n}$ συγκλίνει σε μια ολόμορφη συνάρτηση επί του συνόλου $\mathbb{C}^*$.

Άσκηση 4.8. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλιση των παρακάτω δυναμοσειρών:

i. $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n$,

ii. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{e^n}$,

iii. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$,

iv. $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n$,

v. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{4^n}$

Άσκηση 4.9. Να βρεθεί η περιοχή στην οποία η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2z-1)^n}{n}$ συγκλίνει σε ολόμορφη συνάρτηση.

Άσκηση 4.10. Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης r, τότε να δείξετε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} Re(a_n) z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης μεγαλύτερη του r.

5 Αναπτύγματα Taylor - Laurent, ανωμαλίες

Άσκηση 5.1. Να βρεθούν τα αναπτύγματα Taylor κέντρου 0 καθώς και η ακτίνα σύγκλισής τους, των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(z) = \frac{1}{1-z}$,

ii. $f(z) = \frac{1}{4+z^2}$,

iii. $f(z) = \frac{z}{z-1}$,

iv. $f(z) = \frac{e^x}{1-z}$,

v. $f(z) = \frac{1}{z^2-5z+6}$,

vi. $f(z) = log(1+z)$.

Άσκηση 5.2. Έστω οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ με ακτίνα σύγκλισης r και $c_k = \sum_{n=0}^{k} a_k b_{n-k}$. Να δείξετε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης r και πως για $|z| < r$ ισχύει

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Άσκηση 5.3. Να βρεθούν τα αναπτύγματα Taylor κέντρου 1 καθώς και η ακτίνα σύγκλισής τους, των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(z) = e^z$,

ii. $f(z) = \frac{1}{z}$.

Αναπτύξτε σε σειρά Taylor με κέντρο 0 τη συνάρτηση $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$. Κατόπιν να υπολογίσετε τις παραγώγους $f^{(2n)}(0)$, $f^{2n+1}(0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Άσκηση 5.4. Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της $f(z)$ στο σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : r_0 < |z - z_0| < r_1\}$, όταν:

i. $f(z) = \frac{z+1}{z}$, $z_0 = 0, r_0 = 0, r_1 = +\infty$,

ii. $f(z) = \frac{1}{z+i}$, $z_0 = i, r_0 = 0, r_1 = 1$,

iii. $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $z_0 = i, r_0 = 0, r_1 = 2$,

iv. $f(z) = \frac{cosz}{z^2}$, $z_0 = 0, r_0 = 0, r_1 = +\infty$,

v. $f(z) = sin\left(\frac{1}{z}\right)$, $z_0 = 0, r_0 = 0, r_1 = +\infty$,

vi. $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$, $z_0 = i, r_0 = 0, r_1 = 1$.

Άσκηση 5.5. Να βρεθεί η τάξη του πόλου σε κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις στην ανωμαλία στο 0.

i. $\frac{cosz}{z^2}$,

ii. $\frac{e^z-1}{z^2}$,

iii. $\frac{sinz}{z}$,

iv. $\frac{e^z}{z}$.

Άσκηση 5.6. Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει αιρόμενη ανωμαλία στο z_0:

i. $\frac{cos(z-1)}{z}$, $z_0 = 0$,

ii. $\frac{z}{z-1}$, $z_0 = 1$,

iii. $\frac{z}{e^z-1}$.

Άσκηση 5.7. Να βρεθούν οι πόλοι και η τάξη των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $\frac{1}{z^2 sinz}$,

ii. $\frac{1}{1+e^z}$,

iii. $\frac{sinz}{z^2-z}$.

Άσκηση 5.8. i. Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z-a}$ για $|z| > |a|$ όπου $a < 1$.

ii. Με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος να δείξετε ότι:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^n cosn\theta = \frac{acos\theta - a^2}{1 - 2acos\theta + a^2}$$

Άσκηση 5.9. Αναπτύξτε σε σειρά Laurent τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

σε καθένα από τους δακτύλιους $1 < |z| < 2$ και $|z| > 2$.

6 Μιγαδικά ολοκληρώματα ΙΙ

6.1 Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 6.1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των παρακάτω στα αναφερόμενα σημεία.

i. $\frac{e^z}{z-2}$, $z_0 = 0$,

ii. $\frac{e^z-1}{z-1}$, $z_0 = 1$,

iii. $\frac{e^z-1}{sinz}$, $z_0 = 0$,

iv. $\frac{e^z}{z-2}$, $z_0 = 2$.

Άσκηση 6.2. Ομοίως

i. $\frac{e^z-1}{z^2}$, $z_0 = 0$,

ii. $\frac{e^z+1}{z^4}$ $z_0 = 0$,

iii. $\frac{e^{z^2}}{z-1}$, $z_0 = 1$.

Άσκηση 6.3. να βρεθούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των παρακάτω συναρτήσεων στα ανώμαλα σημεία.

i. $\frac{1}{z^3(z+1)}$,

ii. $\frac{1}{z^3-1}$,

iii. $\frac{1}{e^z-1}$,

iv. $sin\frac{1}{z}$

v. $\frac{1}{(z-1)^2}$.

6.2 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με τη χρήση ολοκληρωτικών υπολοίπων

Άσκηση 6.4. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}dz$, όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας 2,

ii. $\int_\gamma \frac{1}{z^2+z+1}dz$, όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας 2,

iii. $\int_\gamma \frac{1}{z^2+z+1}dz$, όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας $\frac{1}{2}$,

iv. $\int_\gamma \frac{1}{(z+1)^3}dz$, όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας 2,

v. $\int_\gamma \frac{1}{e^z-1}dz$, όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας 1,

vi. $\int_\gamma \frac{1}{z(1-z)^3}dz$, όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας $\frac{1}{2}$,

vii. $\int_\gamma \frac{e^z}{e^z-1}dz$, όπου γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου 0 και ακτίνας $\frac{1}{2}$,.

Άσκηση 6.5. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{e^z}{z^2-3z+2}dz$, όταν γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς κέντρου α) $\frac{3}{2}$, β) 3.

Άσκηση 6.6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{1}{(z-2)(z+1)}dz$, όταν γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς $|z| = 4$.

Άσκηση 6.7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{e^z}{z^{n+1}}dz$, όταν γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς $|z| = 1$. Στη συνέχεια δείξτε ότι $\int_0^{2\pi} e^{cos\theta}cos(n\theta - sin\theta)d\theta = \frac{2\pi}{n!}$.

Άσκηση 6.8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{e^{-z}sinz}{z^3}dz$, όταν γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς $|z-1| = 3$.

Άσκηση 6.9. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz$, όταν γ είναι ο κύκλος θετικής φοράς $|z| = 1$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} e^{-sin2\theta}cos\left(cos2\theta\right)d\theta.$$