Ασκήσεις Πραγματικής Ανάλυσης

e-pitixia
στην -καίδευση

Για περισσότερα λυμένα θέματα και ασκήσεις επικοινωνείστε μαζί μας.
Διαθέτουμε μεγάλη ποικιλία υλικού για μια πληθώρα μαθημάτων.

1 Τοπολογία μετρικών χώρων

Άσκηση 1.1 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι*

(i). για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $X \backslash A^{\circ} = \overline{X \backslash A}$,

(ii). για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$,

(iii). για κάθε $A \subseteq X$. Δείξτε ότι $\partial A = \emptyset$ αν και μόνο αν το A είναι ταυτοχρόνως ανοικτό και κλειστό σύνολο.

Λύση 1.1 *(i). Το A° είναι ανοικτό εξ ορισμού. Συνεπώς το συμπλήρωμά του $X \backslash A^{\circ}$ είναι κλειστό και συνεπώς είναι ίσο με την κλειστότητά του, δηλαδή $X \backslash A^{\circ} = \overline{X \backslash A}$.*

(ii). Σύμφωνα με τον ορισμό ένα στοιχείο $x \in X$ ανήκει στο ∂A αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύουν $B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $B(x,\epsilon) \cap A^{c} \neq \emptyset$.

Αν λοιπόν $x \in \partial A$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$ και συνεπώς $x \in \overline{A}$. Όμοια έχουμε ότι $x \in \overline{X \backslash A}$. Άρα $\partial A \subseteq \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$ και έστω $\epsilon > 0$ τότε,

- $x \in \overline{A}$ *άρα* $B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$
- $x \in \overline{X \backslash A}$ *άρα* $B(x,\epsilon) \cap A^c \neq \emptyset$.

Συνεπώς, $x \in \partial A$. *Άρα* $\partial A \supseteq \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$.

Τελικά, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$.

(iii). Έστω ότι το A *είναι και ανοικτό και κλειστό. Τότε, αφού είναι κλειστό* $A = \overline{A}$. *Επίσης αφού είναι ανοικτό το συμπλήρωμά του* $X \backslash A$ *είναι κλειστό άρα,* $X \backslash A = \overline{X \backslash A}$. *Συνεπώς σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα*

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A} = A \cap (X \backslash A) = \emptyset.$$

Αντίστροφα, έστω ότι $\partial A = \emptyset$. *Τότε από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι* $\overline{A} \cap \overline{X \backslash A} = \emptyset$. *Άρα* $\overline{A} \subseteq \left(\overline{X \backslash A}\right)^c$.

Από τον ορισμό της κλειστότητας έχουμε ότι $\overline{X \backslash A} \supseteq X \backslash A$ *και παίρνοντας τα συμπληρώματα* $\left(\overline{X \backslash A}\right)^c \subseteq (X \backslash A)^c = A$.

Συνεπώς, $A \subseteq \overline{A} \subseteq \left(\overline{X \backslash A}\right)^c \subseteq (X \backslash A)^c = A$. *Δηλαδή,* $A = \overline{A}$ *και άρα το* A *είναι κλειστό.*

Όμοια δείχνουμε ότι το $X \backslash A$ *είναι κλειστό και συνεπώς το* A *είναι ανοικτό.*

Άσκηση 1.2 *(i). Έστω (X,d) μετρικός χώρος και* A, B *υποσύνολα του* X. *Δείξτε ότι* $(A \backslash B)^\circ \subseteq A^\circ \backslash B^\circ$ *και* $\overline{A} \backslash \overline{B} \subseteq \overline{(A \backslash B)}$.

(ii). Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(a) αν $A \cap B = \emptyset$, *τότε* $A \cap \overline{B} = \emptyset$,

(b) αν $A \cap B = \emptyset$, *τότε* $A^\circ \cap \overline{B} = \emptyset$,

Λύση 1.2 *(i). Είναι* $(A \backslash B) \subseteq A$, *άρα* $(A \backslash B)^\circ \subseteq A^\circ$. *Αν* $x \in (A \backslash B)^\circ \subseteq A^\circ$, *τότε υπάρχει* $\epsilon > 0$ *ώστε* $B(x,\epsilon) \subseteq (A \backslash B)$ *και επομένως* $x \notin B$ *άρα και* $x \notin B^\circ$. *Τελικά* $x \in A^\circ \backslash B^\circ$ *και έτσι* $(A \backslash B)^\circ \subseteq A^\circ \backslash B^\circ$.

Έστω $x \in \overline{A} \backslash \overline{B}$ *και* $\epsilon > 0$. *Αφού* $x \notin \overline{B}$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε* $B(x,\delta) \cap B = \emptyset$. *Αν* $\epsilon_0 = min\{\epsilon, \delta\}$, *τότε αφού* $x \in \overline{A}$ *έχουμε* $B(x,\epsilon_0) \cap A \neq \emptyset$. *Έτσι έχουμε ότι υπάρχει* $y \in B(x,\epsilon_0) \cap A$. *Για το στοιχείο αυτό* y *έχουμε:*

- $y \in A$,

- $y \in B(x, \epsilon_0) \subseteq B(x, \epsilon)$,
- $y \in B(x, \epsilon_0) \subseteq B(x, \delta)$ *και άρα* $y \notin B$.

Συνεπώς $y \in B(x, \epsilon) \cap (A \backslash B)$, *δηλαδή* $B(x, \epsilon) \cap (A \backslash B) \neq \emptyset$ *και έτσι εξ' ορισμού* $x \in \overline{(A \backslash B)}$. *Τελικά* $\overline{A} \backslash \overline{B} \subseteq \overline{(A \backslash B)}$

(ii). *(a) Ψευδές. Για παράδειγμα αν* (X, d) *είναι η πραγματική ευθεία με τη συνήθη μετρική και* $A = [0, 1]$, $B = (1, 2)$ *τότε*

- $A \cap B = \emptyset$,
- $\overline{B} = [1, 2]$ *και άρα* $A \cap B = \{1\}$.

(b) Αληθές. Πράγματι, έστω $A \cap B = \emptyset$ *και* $x \in A^\circ \cap \overline{B}$. *Αφού* $x \in A^\circ$ *υπάρχει* $\epsilon > 0$ *ώστε* $B(x, \epsilon) \subseteq A$. *Επίσης* $x \in \overline{B}$ *άρα* $B(x, \epsilon) \cap B \neq \emptyset$, *δηλ. υπάρχει* $y \in B(x, \epsilon) \cap B$. *Επομένως,* $y \in A \cap B$. *Άτοπο.*

2 Συνέχεια

Άσκηση 2.1 *(i). Έστω* $f : (X, d) \to (Y, p)$ *συνεχής συνάρτηση. Αν ο* X *είναι συμπαγής δείξτε ότι η* f *είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(ii). Έστω (X, d) *συμπαγής μετρικός χώρος και έστω* $f : X \to X$ *συνεχής. Ορίζουμε μια ακολουθία υποσυνόλων του* X *ως εξής:*

$$K_1 = X \text{ και } K_{n+1} = f(K_n) \text{ για κάθε } n \geq 1.$$

Αποδείξτε ότι η $\{K_n\}$ *είναι φθίνουσα ακολουφία συμπαγών υποσυνόλων. Επιπλέον δείξτε ότι αν* $K = \cap_{n=1}^{\infty} K_n$, *τότε* $K \neq \emptyset$ *και* $f(K) = K$.

Λύση 2.1 *(i). Έστω* $\epsilon > 0$. *Επειδή η συνάρτηση* f *είναι συνεχής για κάθε* $x \in X$ *υπάρχει* $\delta_x > 0$ *ώστε* $f(B(x, \delta_x)) \subseteq B(f(x), \epsilon/2)$. *Η οικογένεια* $\{B(x, \delta_x/2)\}_{x \in X}$ *αποτελεί ανοικτή κάλυψη του* X. *Λόγω της συμπάγειας του* X *υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη, έστω η* $\{B(x_i, \delta_{x_i}/2)\}_{i=1}^m$. *Αν* $\delta = \frac{1}{2} min\{\delta_{x_i} : i = 1, \ldots, m\}$, *τότε για* $x, y \in X$ *με* $d(x, y) < \delta$ *έχουμε ότι:*

(a) Αφού η $\{B(x_i, \delta_{x_i}/2)\}_{i=1}^m$ *είναι πεπερασμένη κάλυψη του* X *υπάρχει* x_k *ώστε* $x \in B(x_k, \delta_{x_k}/2) \subseteq B(x_k, \delta_{x_k})$.

(b) $y \in B(x_k, \delta_{x_l})$. *Γιατί*

$$d(x_k, y) \leq d(x_k, x) + d(x, y) < \frac{\delta_{x_k}}{2} + \delta < \frac{\delta_{x_k}}{2} + \frac{\delta_{x_k}}{2} = \delta_{x_k}$$

(c) *Αφού* $x \in B(x_k, \delta_{x_k})$ *έπεται ότι* $p\left(f(x), f(x_k)\right) < \epsilon/2$.

(d) *Όμοια αφού* $y \in B(x_k, \delta_{x_k})$ *έπεται ότι* $p\left(f(x_k), f(y)\right) < \epsilon/2$.

(e) *Συνεπώς,*

$$p\left(f(x), f(y)\right) < p\left(f(x), f(x_k)\right) + p\left(f(x_k), f(y)\right) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

(ii). *Επαγωγικά δείχνουμε ότι το* K_i *είναι συμπαγές και ότι* $K_{i+1} \subseteq K_i$.

βήμα 1. *Για* $i = 1$ *έχουμε ότι το* $K_1 = X$ *είναι συμπαγές και* $K_2 = f(X) \subseteq X = K_1$.

βήμα 2. *Έστω ότι το* K_i *είναι συμπαγές και ότι* $K_{i+1} \subseteq K_i$. *Τότε το* $K_{i+1} = f(K_i)$ *είναι συμπαγές ως εικόνα του συμπαγούς* K_i *μέσω της συνεχούς απεικόνισης* f. *Επίσης αφού* $K_i \subseteq K_{i-1}$ *έχουμε* $K_{i+1} = f(K_i) \subseteq f(K_{i-1}) = K_i$.

Με επαγωγή δείχνουμε εύκολα ότι $K_n \neq \emptyset$ *για κάθε* n. *Πράγματι,* $K_1 = X \neq \emptyset$ *και αν* $K_{n-1} \neq \emptyset$, *τότε* $K_n = f(K_{n-1}) \neq \emptyset$.

Αν $K = \cap_{n=1}^{\infty} K_n$, *τότε παρατηρούμε ότι* $K \neq \emptyset$ *αφού η οικογένεια* $\{K_n\}$ *των κλειστών συνόλων του συμπαγούς χώρου* X *έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Πράγματι, αν* $K_{i_1}, \cdots, K_{i_m}$ *είναι ένας πεπερασμένος αριθμός συνόλων της οικογένειας μπορούμε να υποθέσουμε ότι* $i_1 < \cdots < i_m$ *και επειδή η οικογένεια είναι φθίνουσα έχουμε ότι*

$$K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_m} = K_{i_m} \neq \emptyset.$$

Τέλος

$$x \in K \Leftrightarrow x \in \cap_{n=1}^{\infty} K_n \Leftrightarrow$$

$$f(x) \in \cap_{n=1}^{\infty} f(K_n) = \cap_{n=1}^{\infty} K_{n+1} \Leftrightarrow$$

$$f(x) \in X \bigcap (\cap_{n=1}^{\infty} K_{n+1}) \Leftrightarrow$$

$$f(x) \in \cap_{n=1}^{\infty} K_n,\ n \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \in K$$