ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 28.

Α2. Ορισμός. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 14.

«*Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 .*»

Α3. Ορισμός. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 87.

«*Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν ο ν είναι άρτιος.* »

Α4. (α) - Λ
(β) - Σ
(γ) - Λ
(δ) - Λ
(ε) - Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι:

$$P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{(x^3+x^2)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x+1-1}{(x^3+x^2)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{(x^3+x^2)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x\left(x+1\right)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$f'(x)=\left(\frac{x}{3}\ln x\right)'=\left(\frac{x}{3}\right)'\ln x+\frac{x}{3}(\ln x)'=\frac{1}{3}\ln x+\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{3}(1+\ln x)$$

Άρα $P(\omega_3)=f'(1)=\frac{1}{3}$.

Β2. Είναι: $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$, άρα: $\{\omega_3\}\subseteq A' \Rightarrow P(\omega_3)\le P(A') \Rightarrow \frac{1}{3}\le P(A')$ (1)

Επίσης: $A=\{\omega_1,\omega_4\}$ και άρα: $\{\omega_1\}\subseteq A \Rightarrow P(\omega_1)\le P(A) \Rightarrow \frac{1}{4}\le P(A)$

και συνεπώς: $P(A')=1-P(A)\le 1-\frac{1}{4}\le\frac{3}{4}$ (2) .

Τελικά, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $\frac{1}{3}\le P(A')\le\frac{3}{4}$.

Β3. Αφού $P(A')=\frac{3}{4} \Rightarrow P(A)=\frac{1}{4} \Rightarrow P(\omega_1)+P(\omega_4)=\frac{1}{4} \overset{P(\omega_1)=\frac{1}{4}}{\Rightarrow} P(\omega_4)=0$.

Τότε: $P(\omega_2)=1-P\left(\{\omega_1,\omega_3,\omega_4\}\right)=1-P(\omega_1)-P(\omega_3)-P(\omega_4)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-0=\frac{5}{12}$.

$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P\left[\{\omega_4\}\cup\{\omega_3\}\right]=P(\omega_4)+P(\omega_3)=\frac{1}{3}$

$P\left(A'-B'\right)=P(\omega_3)=\frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω 2ν το πλάτος κάθε μίας από τις 4 ισοπλατείς κλάσεις.
Τότε θα είναι: 85=50+2ν+2ν+2ν+ν άρα ν=5 και c=2ν=10 το πλάτος κάθε κλάσης.

Γ2. Αφού είναι δ=75 θα ισχύσει: $f_1+f_2+\frac{f_3}{2}=0,5$ (1) , $\frac{f_3}{2}+f_4=0,5$ (2)

και επειδή από τα δεδομένα τις άσκησης έχουμε ότι: $f_4=2f_3$ (3) από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι: $f_3=0,2$ και $f_4=0,4$, οπότε η σχέση (1) γίνεται: $f_1+f_2=0,4$ (4)

Τέλος ισχύει:

$$\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 \overset{(4)}{\Rightarrow} \bar{x} = f_1x_1 + (0,4 - f_1)x_2 + f_3x_3 + f_4x_4$$

$$74 = 55 \cdot f_1 + 65(0,4 - f_1) + 0,2 \cdot 75 + 0,4 \cdot 85 \Rightarrow 74 = -10f_1 + 26 + 15 + 34$$

$$\Rightarrow f_1 = 0,1$$

Άρα ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές x_i**	**Σχετική συχνότητα f_i**
[50,60)	55	0,1
[60,70)	65	0,3
[70,80)	75	0,2
[80,90)	85	0,4
Σύνολο		1

Γ3. Έστω $\bar{y}$ η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες από 80. Τότε:

$$\bar{y} = \frac{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3}{v_1 + v_2 + v_3} = \frac{\frac{1}{v}\left(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3\right)}{\frac{1}{v}\left(v_1 + v_2 + v_3\right)} = \frac{x_1\frac{v_1}{v} + x_2\frac{v_2}{v} + x_3\frac{v_3}{v}}{\frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \frac{v_3}{v}}$$

$$= \frac{x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3}{f_1 + f_2 + f_3} = \frac{55 \cdot 0,1 + 65 \cdot 0,3 + 75 \cdot 0,2}{0,6} = \frac{40}{0,6} = \frac{200}{3}$$

Γ4. Επειδή η κατανομή είναι κανονική και επειδή το 2,5% των κ παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον 74 αυτό σημαίνει ότι για τη μέση τιμή $\bar{x}_\kappa$ και την τυπική απόκλιση s_κ θα ισχύει: $\bar{x}_\kappa + 2s_\kappa = 74$ (1).
Επιπλέον επειδή το 16% των κ παρατηρήσεων είναι το πολύ 68 αυτό σημαίνει ότι για τη μέση τιμή $\bar{x}_\kappa$ και την τυπική απόκλιση s_κ θα ισχύει: $\bar{x}_\kappa - s_\kappa = 68$ (2).
Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) βρίσκουμε: $\bar{x}_\kappa = 70$ και $s_\kappa = 2$.
Άρα ο συντελεστής μεταβολής των κ παρατηρήσεων είναι: $CV = \frac{s_\kappa}{\bar{x}_\kappa} = \frac{2}{70} < 10\%$
και άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο της με x=1 έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $f'(1)$. Είναι: $f'(x)=\left(x\ln x+\kappa\right)'=1+\ln x$ και άρα: $f'(1)=1$.

Άρα η εφαπτομένη θα έχει εξίσωση της μορφής: $y=x+\beta$, $\beta\in\mathbb{R}$ και επειδή διέρχεται από το σημείο επαφής, οι συντεταγμένες του θα ικανοποιούν την εξίσωσή της, άρα θα ισχύει: $f(1)=1+\beta \Rightarrow \kappa=1+\beta \Rightarrow \beta=\kappa-1$ και η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται: $y=x+\kappa-1$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ και $\kappa>1$.

Η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες στα σημεία:

- $x=0 \Rightarrow y=\kappa-1$, $A(0,\kappa-1)$
- $y=0 \Rightarrow x=1-\kappa$, $A(1-\kappa,0)$

Άρα το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου που σχηματίζεται θα είναι:

$$E=\frac{|(OA)(OB)|}{2}=\frac{(\kappa-1)^2}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{(\kappa-1)^2}{2}<2 \Rightarrow (\kappa-1)^2<4 \Rightarrow -2<\kappa-1<2 \Rightarrow -1<\kappa<3$$

κι επειδή: $\kappa\in\mathbb{Z}$ και $\kappa>1$ θα είναι: κ=2.

Δ2. **α)** Για κάθε ένα από τα 50 σημεία της εφαπτομένης θα ισχύει: $y_i=x_i+1$ άρα οι αντίστοιχες μέσες τιμές θα συνδέονται με τη σχέση:
$\overline{y}=\overline{x}+1 \Rightarrow 31=\overline{x}+1 \Rightarrow \overline{x}=30$.

β) Θα είναι: $31=\dfrac{50\cdot\overline{x}+20\cdot 3-15\cdot\lambda}{50} \Rightarrow 50\cdot 30+20\cdot 3-15\cdot\lambda=1550 \Rightarrow \lambda=\dfrac{2}{3}$.

Δ3. Είναι: $f'(x)=1+\ln x$

Από τον πίνακα μεταβολών της $f(x)$ προκύπτει ότι:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	ελάχιστο	↗	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα: $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ και συνεπώς για:

$\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e$ συνεπάγεται ότι: $f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$.

Επειδή $f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$ και $f\left(\frac{1}{e}\right)=2-\frac{1}{e}>0$ θα ισχύει: $f'\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$,

άρα το ζητούμενο εύρος θα είναι: $R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=e+2$.

Είναι:

$\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}=e^{7} \Rightarrow \ln\left(\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}\right)=\ln e^{7} \Rightarrow \ln\alpha^{\alpha}+\ln\beta^{\beta}+\ln\gamma^{\gamma}=7\ln e$

$\Rightarrow \alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma=7 \quad (1)$

Η ζητούμενη μέση τιμή είναι:

$$\bar{x}=\frac{f'\left(\frac{1}{e}\right)+f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)}{5}=\frac{0+\alpha\ln\alpha+2+\beta\ln\beta+2+\gamma\ln\gamma+2+e+2}{5}$$

$$=\frac{\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma+e+8}{5}\overset{(1)}{=}\frac{7+e+8}{5}=3+\frac{e}{5}$$

Δ4. α) Για να σχηματίζει η εφαπτομένη της f οξεία γωνία με τον $x'x$ πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της να είναι θετικός, ισοδύναμα πρέπει η τιμή της εφαπτομένης της f να είναι θετική.

Από τον πίνακα μεταβολών της $f(x)$ για $x>0$ που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι αυτό ισχύει για $x>\frac{1}{e}$.

Άρα $A=\{t_i : 11\le i\le 30\}$ και επειδή τα t_i είναι απλά, ισοπίθανα ενδεχόμενα έχουμε: $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$.

β) Είναι: $f(t)>f'(t)+1 \Rightarrow t\ln t+2>\ln t+1+1 \Rightarrow (t-1)\ln t>0$.

Το πρόσημο της συνάρτησης $g(t)=(t-1)\ln t$, $t>0$ είναι:

t	0	1	$+\infty$
t-1	-	0	+
lnt	-	0	+
g(t)	+	0	+

Άρα $B=\{t_i : 1 \le i \le 29\}$ και

$$A \cap B=\{t_i : 11 \le i \le 29\} \Rightarrow P(A \cap B)=\frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}=\frac{19}{30}$$